Материалы по алгебре к первому блоку 9 класса
Повторение

Предисловие

Этот материал составлен для повторения и подготовки к итоговой работе по курсу 8 класса, перенесённой на осень 2020 года из-за весеннего карантина. Также для этих целей может пригодиться подборка ключевых задач:
8 класс: `https://drive.google.com/file/d/11Ch6j5a6C28M8sPd8P5IxrPHDzUm_K7h/view`,
7 класс: `https://drive.google.com/file/d/1XmO3j9L7fGytrmcOWrIuHIyQXbdsBEPH/view`.

Кроме того, можно использовать задачник [1]. В ряде случаев мы даём прямые ссылки на упражнения из этого задачника, эти ссылки выделены буквой «**З**» на полях и двумя чертами.

Замечания, вопросы, комментарии присылайте на почту `vertical.algebra@179.ru`.

Список используемых обозначений

- $\boxed{\rightarrow}$ отмечает примеры;
- $\boxed{?}$ отмечает вопросы.
- Звёздочкой «*» отмечены задачи и разделы, не входящие в обязательную программу. Часто они труднее остальных, иногда — гораздо труднее.
- З || отмечает ссылки на задачник [1].
-  отмечает задачи-шутки.
- Λ отмечает задачи на логику.

Содержание

1 Повторение курса 7–8 классов

1.1 Вычисления

З По этой теме можно использовать главу I из задачника [1] (стр. 5–18).

Замечание 1. Вычисления — отличная тренировка. Иногда нужно просто аккуратно выполнить все действия, нигде не ошибившись. Этот навык очень важен и незаменим. Но иногда можно применить какой-то трюк, упрощающий вычисления. Обратим внимание на один из них — вынесение общего множителя за скобки. Почти все умеют применять этот трюк при приведении дробей к общему знаменателю, но он уместен и в других ситуациях.

$\boxed{\to}$ **Пример 1.** Вычислите: $\dfrac{72}{325} - \dfrac{9}{275}$.

Решение. Числитель обеих дробей делится на 9, а знаменатель — на 25. Вынесем общий множитель за скобку:

$$\frac{72}{325} - \frac{9}{275} = \frac{9}{25}\left(\frac{8}{13} - \frac{1}{11}\right) =$$

теперь гораздо проще привести дроби к общему знаменателю:

$$= \frac{9}{25}\left(\frac{8 \cdot 11 - 13}{13 \cdot 11}\right) = \frac{9}{25} \cdot \frac{75}{13 \cdot 11} = \frac{9 \cdot 75}{25 \cdot 13 \cdot 11} = \frac{9 \cdot 3 \cdot 25}{25 \cdot 143} = \frac{27}{143}.$$

Ответ. 27/143.

$\boxed{\to}$ **Пример 2.** Найдите длину гипотенузы прямоугольного треугольника, если длины его катетов равны 0,95 м и 2,28 м.

Решение. По теореме Пифагора искомая длина гипотенузы (пусть она x м) удовлетворяет уравнению $x^2 = 0{,}95^2 + 2{,}28^2$, откуда, поскольку $x \geqslant 0$, получаем: $x = \sqrt{0{,}95^2 + 2{,}28^2}$.
Сначала избавимся от дробей под корнем:
$x = \sqrt{0{,}01^2 \cdot 95^2 + 0{,}01^2 \cdot 228^2} = \sqrt{0{,}01^2 \cdot (95^2 + 228^2)} = 0{,}01\sqrt{95^2 + 228^2}$

Теперь, чтоб не возводить 95 и 228 в квадрат, посмотрим, нет ли у них общего множителя. Сразу ясно, что 95 делится на 5, разделим и получим: $95 = 5 \cdot 19$. Понятно, что 228 на 5 не делится, проверим, не делится ли оно на 19. Можно поделить в столбик или в уме, а можно разложить на множители, деля на 2 и 3: $228 = 2 \cdot 114 = 4 \cdot 57 = 4 \cdot 3 \cdot 19$. Итак, всё тот же x равен:

$$0{,}01\sqrt{(19 \cdot 5)^2 + (19 \cdot 12)^2} = 0{,}01 \cdot \sqrt{19^2(5^2 + 12^2)} = 0{,}01 \cdot 19 \cdot \sqrt{25 + 144} = 0{,}01 \cdot 19 \cdot 13.$$

Чему равно $19 \cdot 13$, посчитаем в уме: $20 \cdot 13 = 260$, а у нас не 20, а 19, то есть на 13 меньше, 247. Осталось умножить на 0,01, то есть перенести запятую на 2 знака влево. И вспомнить, что все величины мы измеряли в метрах.
Ответ. 2,47 м.

З Разложение чисел на множители и вынесение множителя за скобку помогут, например, в следующих упражнениях задачника [1]:
стр. 5–8: A4, A5, A14, A15, C8; **стр. 9–13**: A3, B3, C12; **стр. 14–18**: A10, B8, B11, C2.

Задача 1. Вычислите устно

а) $0{,}75 : \frac{3}{4}$;
б) $-3{,}5 + \frac{7}{2}$;
в) $\left(\sqrt{144}\right)^2$;
г) $0{,}25 \cdot 19 \cdot 4$;
д) $\sqrt{81} - 2^4$;
е) $6^3 \cdot 6^{-3}$;
ж) $\left(-1\frac{1}{2}\right)^2$;
з) $1{,}5 \cdot \frac{4}{3}$;
и) $-1{,}25 - \frac{5}{4} + 3$;
к) $\left(\sqrt{3}\right)^4$;
л) $0{,}5 : \frac{1}{8} \cdot 15$;
м) $2^{-2} + \sqrt{0{,}25}$;
н) $3^7 \cdot 3^{-4}$;
о) $\left(-3\frac{1}{3}\right)^3$;
п) $2{,}5 \cdot 0{,}4$;
р) $-0{,}4 - \frac{2}{5} + 0{,}81$;
с) $\sqrt{4^6}$;
т) $0{,}3 : \frac{10}{3} : 0{,}2$;
у) $0{,}5^{-2} - \sqrt{36}$;
ф) $0{,}1^8 \cdot 0{,}1^{-10}$;
х) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$.

Задача 2. Найдите значение выражения при $a = 0{,}5$, $b = \sqrt{2}$, $c = 2$

а) abc;
б) $a^2b^2c^2$;
в) $a^5b^4c^3$;
г) ab^2c^3;
д) $a^5b^5c^5$;
е) $a^{17}b^{16}c^{15}$;
ж) $a^{-2}b^{-2}c^{-2}$;
з) $a^8b^{10}c^{-2}$;
и) $a^{-10}b^{20}c^{-30}$.

Задача 3. Вычислите значение выражения

а) $\dfrac{2^{10} \cdot 2^{15}}{2^{20}}$;
б) $3{,}7 \cdot 0{,}32 - 3{,}7 \cdot 0{,}17 + 0{,}15 \cdot 6{,}3$;
в) $\dfrac{39 + 175}{25} - 0{,}56$;
г) $\dfrac{3^{10} \cdot (3^{15})^4}{(3^4)^{16}}$;
д) $1{,}7(3{,}9 - 4{,}73) - 3{,}9 \cdot 0{,}7 + 1{,}7 \cdot 0{,}73$;
е) $123{,}4 - \dfrac{7 + 500}{5}$;
ж) $\dfrac{125^7 \cdot 35^8}{343^2 \cdot 25^{15}}$;
з) $1{,}5 \cdot 0{,}32 - 1{,}5(0{,}32 - 0{,}4)$;
и) $(-6)^3 - \dfrac{42 - 900}{3}$.

Задача 4. Вычислите значение выражения, используя формулы сокращённого умножения и, при необходимости, вынесение множителя за скобку

а) $(3 + \sqrt{2})^2 - (3 - \sqrt{2})^2$;
б) $199^2 - 198^2$;
в) $201^2 - 2 \cdot 201 + 1$;
г) $(\sqrt{3} - \sqrt{6})^3$;
д) $\sqrt{35^2 - 21^2}$;
е) $2^{14} + 2^{13} + 2^{10}$;
ж) $(2^4 - 2^{-3})(2^4 - 2^{-3})$;
з) $\sqrt{125^2 + 300^2}$;
и) $2^{-10} - 2^{-8} \cdot 6^{-1} + 2^{-8} \cdot 6^{-2}$.

Задача 5. Зоя заявила, что у неё в кармане вот столько грецких орехов:

$$\frac{\sqrt{0{,}72} \cdot \sqrt{27} \cdot \sqrt{3^{-28}} \cdot \sqrt{880}}{\sqrt{96} \cdot \sqrt{44{,}55} \cdot \sqrt{27^{-10}}}$$

и она отдаст их тому, кто первым правильно назовёт их количество одним словом. Сколько же у неё орехов?

Задача 6*. Федя обещает целую коробку, а именно — вот столько конфет:

$$\left(\frac{3\left(\frac{17}{90} - 0{,}125 : 1\frac{1}{8}\right) : 480}{\left(7 : 1{,}8 - 2\frac{1}{3} : 1{,}5\right) : 2\frac{2}{3}}\right)^{-1} : \left(\frac{679 \cdot 10^{-3}}{0{,}07} + 0{,}3\right)$$

— тому, кто запишет их количество тремя цифрами. Сделайте это![1]

[1]Этот пример предлагался на вступительном экзамене на психологический факультет МГУ в 1984 году. Решение можно посмотреть в книге [2] на стр. 18–19.

1.2 Квадратный трёхчлен

1.2.1 Корни квадратного трёхчлена

Задача 7. Для каких из следующих уравнений число $x = 0$ является корнем?

а) $2x^3 = x^4$;
б) $22x^2 - 5x - 17 = 0$;
в) $(12x - 3)(12x + 3) = 144x^2 - 9$;
г) $3x(2x - 1) = x(2x + 1)$;
д) $|2x - 3| - |2x - 1| = 2$;
е) $\dfrac{x+5}{x-2} + \dfrac{x+5}{x+2} = 0$;
ж) $\sqrt{16 - x^2} = 4 - x$;
з) $\sqrt{x-2} + x = 1$;
и) $(\sqrt{x+5})^2 = 6$.

Задача 8. **а)** Для каких из уравнений задачи 7 число $x = 1$ является корнем?
б) Какие из уравнений задачи 7 имеют бесконечно много корней?
в) Какое из уравнений задачи 7 не имеет корней?

? **Вопрос 1.** Какие из уравнений задачи 7 являются квадратными?

T **Теорема.** Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$ с коэффициентами $a \neq 0$, b, c и дискриминантом $D = b^2 - 4ac$

- имеет два корня $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, если $D > 0$;
- имеет один корень $x = \dfrac{-b}{2a}$, если $D = 0$;
- не имеет действительных[2] корней, если $D < 0$.

Задача 9. Не вычисляя дискриминант уравнения, подбором найдите хотя бы один его корень (то есть угадайте корень и проверьте подстановкой)

а) $3x^2 - 15x = 0$;
б) $x^2 + x + 1 = 3$;
в) $x^2 - x + 1 = 3$;
г) $x^2 + x + 1 = 7$;
д) $3x^2 + 10x - 13 = 0$;
е) $2x^2 + 3x + 4 = 234$;
ж) $x^2 + 7x - 8 = 0$;
з) $5x^2 - 2x - 16 = 0$;
и) $19x^2 - 11x - 30 = 0$;
к) $x^2 + x - 0{,}75 = 0$;
л) $5x^2 + 0{,}1x - 0{,}06 = 0$;
м) $5x^2 - 1000x - 2020 = 0$.

$\rightarrow$ **Пример 3.** Решить уравнение $x^2 - 80x - 164 = 0$.

Решение. Перед нами квадратное уравнение с коэффициентами $a = 1, b = -80, c = -164$. Вычислить дискриминант $D = (-80)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-164) = 6400 + 656 = 7056$ можно в столбик или даже устно, но теперь пришло время извлечь из него корень...

[2] В математических текстах встречаются словосочетания «нет действительных корней», «существует действительный корень», и т.д. Но зачем так писать? Действительные числа — это «все числа»? — натуральные, и дроби, и отрицательные, и даже иррациональные вроде $\sqrt{2}$ или π — вообще все точки на числовой прямой соответствуют какому-либо действительному числу! Вы правы. В нашем курсе никакие числа, кроме действительных, не изучаются, поэтому «нет действительных корней» значит для нас то же самое, что и «нет корней».

? **Вопрос 2.** Как извлечь квадратный корень из числа 7056, не прибегая к помощи калькулятора?

Способ 1. Оценим значение $\sqrt{7056}$ с двух сторон, а если повезёт — то и точное значение найдём.

? **Вопрос 3.** Что больше: $\sqrt{7056}$ или 50? $\sqrt{7056}$ или 100? $\sqrt{7056}$ или 90?

? **Вопрос 4.** На какую цифру может оканчиваться целое число, если его квадрат оканчивается на цифру 6?

Ясно, что $80^2 = 6400$, значит, $80 < \sqrt{7056}$. А вот $90^2 = 8100 \Rightarrow \sqrt{7056} < 90$. Таким образом, искомое значение где-то между 80 и 90. Мы надеемся (хоть и не уверены), что корень извлекается и $\sqrt{7056}$ — целое число. Тогда на конце этого числа стоит либо 4, либо 6. То есть у нас всего два кандидата: 84 и 86. Начнём с меньшего: $84^2 = (80+4)^2 = 80^2 + 2\cdot 80\cdot 4 + 16 = 6400 + 640 + 16 = 7040 + 16 = 7056$. Ура!

Способ 2. Упростим выражение $\sqrt{7056}$, раскладывая число под корнем на множители. Ясно, что 7056 делится на 2 и даже на 4, получим $7056 = 2\cdot 3528 = 2\cdot 2\cdot 1764$. Далее, число 1764 делится на 9 (по признаку делимости), получаем: $= 2\cdot 2\cdot 9\cdot 196$, а 196 входит в таблицу квадратов, так что многие даже помнят, что $196 = 14^2$. Итак, $\sqrt{7056} = \sqrt{2\cdot 2\cdot 9\cdot 14^2} = \sqrt{2\cdot 2}\cdot\sqrt{9}\cdot\sqrt{14^2} = 2\cdot 3\cdot 14 = 84$.

? **Вопрос 5.** В чём заключаются признаки делимости целого числа на 4, 8, 3 и 9?

? **Вопрос 6.** Какой способ извлечения корня из большого дискриминанта вам больше нравится? Какие преимущества и недостатки вы видите у каждого способа?

Итак, мы установили, что $\sqrt{D} = 84$, значит, уравнение имеет два корня $x_1 = \dfrac{-(-80)+84}{2\cdot 1} = \dfrac{80+84}{2} = 40 + 42 = 82$ и $x_2 = 40 - 42 = -2$.

Ответ. 82; -2.

? **Вопрос 7.** Как решить уравнение из примера 3, не вычисляя его дискриминант?

Задача 10. Решите уравнения:

а) $x^2 + 7x + 10 = 0$; **г)** $4x^2 - 2\sqrt{20}x + 5 = 0$; **ж)** $5x^2 - 14x - 3 = 0$;
б) $x^2 - 8x + 15 = 0$; **д)** $x^2 - 2x - 48 = 0$; **з)** $6x^2 - 13x + 6 = 0$;
в) $x^2 - 4x + 15 = 0$; **е)** $256x^2 - 32x + 1 = 0$; **и)** $5x^2 - 11x + 7 = 0$.

Задача 11. Решите уравнение и выясните, сколько его корней принадлежит указанному отрезку:

а) $9x^2 - 6x - 35 = 0$; $[-2; 2]$; **г)** $21x^2 - 37x - 120 = 0$; $[-2; 4]$;
б) $x^2 - 6x + 7 = 0$; $[2; 4]$; **д)** $4x^2 + 4x - 4\sqrt{5}x + 6 - 2\sqrt{5} = 0$; $[0{,}5; 1]$;
в) $4x^2 + 20x + 13 = 0$; $[-5; -0{,}5]$; **е)** $x^2 - 7x - 139 = 0$; $[-10; 14]$.

Задача 12. [3] *Найдите ошибку в следующем рассуждении.*
«Докажем, что существует квадратное уравнение, имеющее три корня. Рассмотрим, например, такое уравнение:

$$\frac{(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}+\frac{(x-\sqrt{3})(x-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{5})}+\frac{(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{5})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{5})}=1.$$

Несложно убедиться, что числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ являются его корнями. В знаменателях дробей переменная отсутствует, поэтому перемножив скобки в числителях и приведя подобные слагаемые, получим квадратное уравнение.»

Задача 13*. Говорят, что при $c \neq 0$ корни квадратного трёхчлена ax^2+bx+c можно вычислить ещё и по формуле

$$x_{1,2}=\frac{2c}{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}.$$

Правда ли это?

Подсказка. Рассмотрите выражение $c\left(\frac{1}{x}\right)^2+b\left(\frac{1}{x}\right)+a$. Подробнее можно почитать в [4, №320,321]

Вопрос 8. В задаче 13 ничего не сказано про случай $a=0$. Конечно, в этом случае выражение ax^2+bx+c и не является квадратным трёхчленом. Но всё же: будет ли в этом случае работать предложенная формула?

1.2.2 Выделение полного квадрата и разложение квадратного трехчлена на множители

Квадратный трёхчлен, помимо стандартного вида $ax^2 + bx + c$, имеет ещё два важных представления. Во-первых, *всегда* можно **выделить полный квадрат**, то есть представить трёхчлен в виде $a(x-p)^2+q$. Во-вторых, *иногда* можно **разложить трёхчлен на множители**, то есть представить в виде $a(x-m)(x-n)$. Эти два представления тесно связаны друг с другом, а также с областью значений, корнями и дискриминантом квадратного трёхчлена. Об этом и пойдёт речь в этом разделе.

$\boxed{\rightarrow}$ **Пример 4.** Дан квадратный трёхчлен $-2x^2 + 16x + 1$. Выделите полный квадрат и разложите трёхчлен на множители. Найдите наибольшее и наименьшее значение трёхчлена, если они определены.

Решение. Начнём с выделения полного квадрата. При этом не будем уделять особого внимания свободному члену, а из остального выражения вынесем «минус двойку» (старший коэффициент) за скобки:

$$-2x^2 + 16x + 1 = -2(x^2 - 8x) + 1 =$$

Теперь «организуем» внутри скобок полный квадрат

$$= -2(x^2 - 2 \cdot x \cdot 4) + 1 = -2(x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 - 16) + 1 = -2((x-4)^2 - 16) + 1 =$$

И раскроем скобки

$$= -2(x-4)^2 + 32 + 1 = 33 - 2(x-4)^2$$

Итак,

$$\boxed{-2x^2 + 16x + 1 = 33 - 2(x-4)^2}$$

Теперь легко найти наибольшее значение трёхчлена. Из числа 33 вычитается выражение $2(x-4)^2$, которое не бывает отрицательным. Значит, результат меньше или равен 33. Равенство достигается при $2(x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 4$. А вот наименьшего значения у трёхчлена нет — вычитаемое $2(x-4)^2$ может быть сколь угодно большим, а значение трёхчлена — сколь угодно маленьким.

Перейдём к разложению на множители. Посмотрим на равенство в рамке. Правую часть этого равенства вполне можно рассматривать как разность квадратов, ведь $33 = (\sqrt{33})^2$, а $2(x-4)^2 = (\sqrt{2}\,x - 4\sqrt{2})^2$. Поэтому

$$-2x^2+16x+1 = 33-2(x-4)^2 = \left(\sqrt{33} - (\sqrt{2}\,x - 4\sqrt{2})\right)\left(\sqrt{33} + (\sqrt{2}\,x - 4\sqrt{2})\right) = \ldots$$

Мы уже получили разложение трёхчлена на два линейных множителя, но можно их немного преобразовать:

$$\ldots = -\sqrt{2}\left(x - 4 - \sqrt{\tfrac{33}{2}}\right)\cdot\sqrt{2}\left(x - 4 + \sqrt{\tfrac{33}{2}}\right) = -2\left(x - 4 - 0{,}5\sqrt{66}\right)\left(x - 4 + 0{,}5\sqrt{66}\right).$$

Ответ. $33 - 2(x-4)^2$; $-2\left(x - 4 - 0{,}5\sqrt{66}\right)\left(x - 4 + 0{,}5\sqrt{66}\right)$; max значение 33; наименьшее значение не определено.

Задача 14. Установите соответствие между квадратным трёхчленом и соответствующим выражением с выделенным полным квадратом. При этом найдите и исправьте одну ошибку, допущенную при выделении полного квадрата.

$\boxed{1}$ $-x^2+4x+3$	$\boxed{\text{А}}$ $(x+1{,}5)^2+7{,}75$
$\boxed{2}$ x^2+4x+3	$\boxed{\text{Б}}$ $(2x+3)^2+1$
$\boxed{3}$ $6x-9x^2$	$\boxed{\text{В}}$ $1-(3x-1)^2$
$\boxed{4}$ $4x^2+6x+10$	$\boxed{\text{Г}}$ $7-(x-2)^2$
$\boxed{5}$ x^2-3x	$\boxed{\text{Д}}$ $(x-1{,}5)^2-2{,}25$
$\boxed{6}$ $x^2+3x+10$	$\boxed{\text{Е}}$ $(x+2)^2-1$

Задача 15. Для каждого трёхчлена из задачи 14 найдите, какое наименьшее и наибольшее значение он может принимать (если это значение определено), и укажите значение x, при котором это значение достигается.

Задача 16. Решите уравнения, не используя формулу для его корней. Там, где это не сделано, предварительно выделите полный квадрат.

а) $x^2=144$; **г)** $4x^2=3$; **ж)** $x^2-6x+9=25$;
б) $(3x-\sqrt{18})^2=0$; **д)** $(2x-3)^2-169=0$; **з)** $x^2-6x-40=0$;
в) $(x-1)^2=100$; **е)** $4x^2-12x+9=5$; **и)** $x^2-6x+7=0$.

Задача 17. Используя формулу разности квадратов, представьте многочлен в стандартном виде.

а) $(2a-7)(2a+7)$; **в)** $(x+y-z)(x+y+z)$; **д)** $(x+7-2\sqrt{5})(x+7+2\sqrt{5})$;
б) $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$; **г)** $(x-1-\sqrt{3})(x-1+\sqrt{3})$; **е)** $(x-2+\sqrt{3})(x+2-\sqrt{3})$.

Задача 18. Используя формулу разности квадратов, разложите выражение на множители. Где необходимо, предварительно выделяйте полный квадрат.

а) x^2-16; **е)** $(x+4)^2-25$; **л)** $x^2+12xy+35y^2$;
б) 2022^2-2020^2; **ж)** $(x+4)^2-5$; **м)** $x^2+14x+49-z^2$;
в) x^2-3; **з)** $4(x-3)^2-49$; **н)** $x^2+14x+45$;
г) $(a+7)^2-b^2$; **и)** $3(x-10)^2-2$; **о)** $x^2+14x+47$;
д) $(a+b+c)^2-(d-e)^2$; **к)** $x^2+12xy+36y^2-z^2$; **п)** $4x^2+28x-11$.

Задача 19. Решите уравнения:

а) $(x-5)(x-3)=0$;
б) $(2x-7)(x+13)=0$;
в) $3x(2x-\sqrt{8})=0$;
г) $(x+7)^2=0$;
д) $(3x-51)(5x+\sqrt{180})=0$;
е) $4x(4x+1)=0$;
ж) $(18x+12)^2=0$;
з) $\left(\frac{6}{7}x-5\frac{1}{7}\right)(8x+6)=0$;
и) $x(0{,}1x-2)(2x+0{,}1)=0$;
к) $(5x-0{,}6)(\sqrt{0{,}6}x+\sqrt{6})=0$;
л) $(5x^2+9)\left(\frac{2}{3}x+1\frac{1}{3}\right)=0$.

T

Теорема (*о разложении квадратного трёхчлена на множители*).

- Различные числа x_1, x_2 являются корнями квадратного трёхчлена ax^2+bx+c тогда и только тогда, когда $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$.
- Квадратный трёхчлен ax^2+bx+c имеет единственный корень x_0 тогда и только тогда, когда $ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$.
- Квадратный трёхчлен не имеет корней тогда и только тогда, когда его нельзя разложить на линейные множители.

Замечание 2. Теорема разбивается на шесть утверждений. Каких именно? Приведённая выше формулировка состоит из трёх пунктов, а каждый из них имеет две части: «в одну сторону» и «в обратную». Например, в 3-м пункте утверждается:
1) если квадратный трёхчлен не имеет корней, то его нельзя разложить на линейные множители;
2) если квадратный трёхчлен нельзя разложить на линейные множители, то у него нет корней.

Задача 20. **а)** Объясните, как последний пункт теоремы вытекает из двух предыдущих.
б) Докажите утверждения первых двух пунктов теоремы «справа налево» (если разложение есть, то стоящие в нём числа — корни).
в***)** Докажите теорему о разложении квадратного трёхчлена на множители.

Замечание 3. Теорема о разложении квадратного трёхчлена на множители является следствием **теоремы Безу**: *если число $x = k$ является корнем многочлена $P(x)$, то многочлен $P(x)$ делится на $(x-k)$, то есть $P(x) = (x-k)\cdot Q(x)$ для некоторого многочлена $Q(x)$*. Для данных $P(x)$ и k многочлен $Q(x)$ можно найти подбором или делением многочленов в столбик.

Задача 21. Установите соответствие между квадратным трёхчленом и его разложением на множители

1	x^2-5x+6	А	$(x+2)(x+4)$
2	$x^2-7x+12$	Б	$(x+4)(x-3)$
3	x^2+5x+6	В	$(x-3)(x-4)$
4	x^2+6x+8	Г	$(x-3)(x-2)$
5	x^2-x-12	Д	$(x-4)(x+3)$
6	x^2+x-12	Е	$(x+2)(x+3)$

Задача 22. Разложите трёхчлен на линейные множители и найдите его корни

а) $6x^2-96x$; **г)** $8x^2-512$; **ж)** $0{,}02x^2-18$;
б) $x^2-12x+20$; **д)** x^2-x-30; **з)** $3x^2-2x-1$;
в) $x^2+12x+20$; **е)** x^2+x-30; **и)** $x^2-2021x+2020$.

Задача 23. Дан трёхчлен

а) $x^2 - 8x - 9$; **б)** $x^2 - 8x + 15$; **в)** $x^2 - 8x + 20$; **г)** $x^2 - 8x - 10$.

Сделайте в любом порядке три вещи:

1) найдите четверть его дискриминанта по формуле $\frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$ и вычислите корни по формуле $x_{1,2} = \dfrac{1}{a}\left(-\dfrac{b}{2} \pm \sqrt{\dfrac{D}{4}}\right)$;

2) выделите полный квадрат и найдите наименьшее значение трёхчлена;

3) разложите трёхчлен на линейные множители, если это возможно.

? **Вопрос 9.** Какая связь между наименьшим значением трёхчлена и дискриминантом прослеживается в задаче 23?

Задача 24*. Найдите наименьшее (наибольшее) значение произвольного квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ в зависимости от параметров a, b, c.

Т **Теорема** (*Виета о корнях квадратного трёхчлена*).

- Если различные числа x_1, x_2 являются корнями приведённого квадратного трёхчлена $x^2 + px + q$, то $x_1 + x_2 = -p$; $x_1x_2 = q$.
- Если различные числа x_1, x_2 являются корнями трёхчлена $ax^2 + bx + c$, то $x_1 + x_2 = -b/a$; $x_1x_2 = c/a$.

Замечание 4. Верны и утверждения, обратные к только что сформулированным.

Задача 25. Сформулируйте и докажите *обратную теорему Виета.*

? **Вопрос 10.** Можно ли сформулировать аналог теоремы Виета для квадратного трёхчлена, имеющего единственный корень?

Задача 26. Докажите теорему Виета, используя теорему о разложении квадратного трёхчлена на множители.

Задача 27. Докажите теорему Виета, используя формулу корней квадратного трёхчлена через дискриминант.

Задача 28. Запишите в стандартном виде квадратное уравнение, имеющее корни

а) $x_1 = 5, \quad x_2 = -8$; **в)** $x_1 = 3 - \sqrt{7}, \quad x_2 = 3 + \sqrt{7}$;
б) $x_1 = -0{,}2, \quad x_2 = -0{,}5$; **г)** $x_1 = -2\sqrt{2}, \quad x_2 = \sqrt{2}$.

Задача 29. Решите уравнения:

а) $x^2 - \left(\frac{11}{17} + \frac{7}{11}\right)x + \frac{7}{17} = 0$; **б)** $x^2 + \left(9 - \frac{7}{9}\right)x = 7$; **в)** $10x^2 - 109x + 90 = 0$.

Задача 30*. [5, 6.7] При каких значениях параметра a один из корней уравнения $x^2 - \frac{15}{4}x + a^3 = 0$ является квадратом другого?

Задача 31*. Найти все решения уравнения с четырьмя неизвестными:
$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = x(y + z + t)$. [*Московская математическая олимпиада, 1975 г.*]

1.2.3 Текстовые задачи, приводящие к квадратным уравнениям

Задача 32. Два брата терпеливо решают раздел рабочей тетради с примерами на перемножение трёхзначных чисел в столбик. Старший брат решает на 2 примера в час больше, чем младший. Сначала младший сделал 12 примеров, а потом старший — оставшиеся 20. Всего у них ушло на эту работу три с половиной часа. Сколько примеров в час решает старший брат?

Задача 33. Существуют ли два числа с суммой 4 и произведением 1?

Задача 34. Найдите длину прямоугольника с площадью 30 и периметром 23.

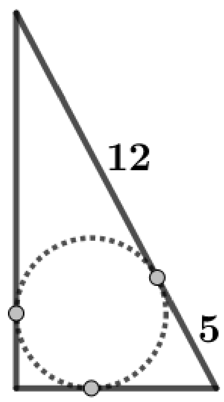
Задача 35. Существует ли прямоугольник
а) с периметром 8 и площадью 2?
б) с периметром 14 и площадью 13?

Задача 36. Гипотенуза на 4 см больше одного катета прямоугольного треугольника, а другой катет равен среднему арифметическому гипотенузы и первого катета. Найдите стороны треугольника.

Задача 37. Найдите два числа, если их произведение в пять раз больше их разности и на 56 больше их суммы.

Задача 38. За 3 часа моторная лодка прошла 44 км по течению реки и 45 км против течения. Найдите скорость лодки по течению, если скорость течения равна 3 км/ч.

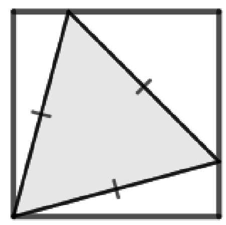
Задача 39. [6, 308] В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки, равные 5 и 12. Найдите катеты треугольника.



Задача 40*. Опишите все прямоугольные треугольники, в которых длина одной из сторон равна среднему арифметическому длин двух других.

Задача 41*. По пустыне равномерно движется караван верблюдов длиной в 1 км. Всадник проехал от конца каравана к началу и вернулся к концу каравана. За это время караван прошёл 1 км. Какой путь проехал всадник, если скорость его была постоянной?

Задача 42. **а)** [7, с.191 №44] Сторона квадрата равна 1. Найдите сторону правильного треугольника, одна вершина которого совпадает с вершиной квадрата, а две другие лежат на его сторонах.



б) Если в пункте (а) у вас (так же, как и у нас) получился ответ с «двойными радикалами» (то есть выражение вида $\sqrt{\ldots\sqrt{\ldots}}$), попробуйте от них избавиться и представить ответ в виде $\sqrt{a}-\sqrt{b}$.
в) При решении задачи из пункта (а) у нас — а, может быть, и у вас — возникало квадратное уравнение с двумя корнями. Мы выбрали меньший корень. А какой геометрической ситуации соответствует больший?

1.3 Логика. Следствие и равносильность

Напомним, что два утверждения называются *равносильными*, если они могут быть верны только одновременно. Говорят, что первое из равносильных утверждений верно *тогда и только тогда*, когда верно второе. Равносильность обозначают знаком «$\Leftrightarrow$».

Например, $x + 3 = 5 \Leftrightarrow 7x = 14$. Неважно, что сообщить про число x: что «$x + 3 = 5$» или что «$7x = 14$» — по сути это будет одна и та же информация.

Вопрос 11. Какие уравнения (неравенства, системы уравнений и неравенств) называются равносильными?

Не любые утверждения равносильны. Например, утверждения «$x^2 + 2x = 3$» и «y — нечётное число» — никак не связаны между собой и, конечно, не равносильны.

Иногда про два неравносильных утверждения можно сказать, что одно из них *сильнее* другого (а второе, соответственно, «слабее» первого).

Определение 1. Если утверждение A является следствием утверждения B, но не равносильно ему, говорят, что утверждение B *более сильное*, чем утверждение A.

Замечание 5. Некоторые утверждения нельзя сравнить «по силе». Например, про утверждения «x —чётно» и «$x > 10$» нельзя сказать, какое из них сильнее, так как ни одно из них из другого не следует.

Пример 5. Найдите среди данных утверждений самое сильное и самое слабое.
А. Миша решил все задачи из сегодняшнего домашнего задания.
Б. Миша решил задачу №6 из сегодняшнего домашнего задания.
В. Миша решил некоторые задачи из сегодняшнего домашнего задания.
Г. Миша в этом году решил хотя бы одну из заданных на дом задач.
Д. Мише всегда решает все задачи из домашнего задания.

Решение. Посмотрим на утверждения как на информацию, сообщённую нам про Мишу. Какие выводы мы можем сделать в каждом случае?

Например, ясно, что если Миша всегда всё решает, то и в этом году, и сегодня он решил всё, в том числе №6. Поэтому из утверждения Д вытекают все остальные, а значит утверждение Д — самое сильное. Если Миша так силён, что про него верно утверждение Д, то все остальные четыре утверждения верны автоматически.

Попробуем теперь расположить остальные утверждения в виде цепочки следствий. Если Миша решил все задачи сегодня, то и задачу №6 решил. Если он решил задачу №6, то не будет ложью сказать, что он сегодня решил «некоторые задачи». А раз уж он сегодня решил некоторые задачи, то и в этом году он что-то решил.

Итак, получаем схему Д $\Rightarrow$ А $\Rightarrow$ Б $\Rightarrow$ В $\Rightarrow$ Г.

Значит, утверждение Г — самое слабое из предложенных. Оно робко предполагает, что Миша в этом году решил хоть что-то, необязательно всё, необязательно сегодня, необязательно №6...

Ответ. Г — самое слабое, Д — самое сильное.

Вопрос 12. А куда в схему из примера 5 попали бы следующие утверждения:
Е: «Миша решил хотя бы две задачи из вчерашнего домашнего задания»?
Ё: «В Мишином классе все ученики всегда справляются со всеми задачами из домашнего задания»?
Ж: «В Мишином классе некоторые ученики иногда справляются с некоторыми задачами из домашнего задания»?

$\boxed{\rightarrow}$ **Пример 6.** Про число x было сделано несколько верных утверждений.
Аня: «x — положительное»;
Боря: «$3x-2>0$»;
Витя: «$x^2+5x+3>0$»;
Гриша: «$3x-2\geqslant 0$»;
Даша: «$9x^2-17x+8=0$».
Докажите, что достаточно было сообщить лишь одно из них.

Решение. Запишем те же самые утверждения чуть более кратко, а затем расставим между ними знаки следствий:
А: $x>0$; Б: $x>2/3$; В: $x^2+5x+3>0$; Г: $x\geqslant 2/3$; Д: $(9x-8)(x-1)=0$.

Сразу видно, что утверждения Бори и Гриши очень похожи. Какое из них сильнее? Гриша утверждает, что число либо больше 2/3, либо равно 2/3, а Боря уверен, что оно именно больше. Значит, Боря даёт нам более точную информацию, сужает множество подходящих иксов, и Борино утверждение сильнее Гришиного:

$$x>2/3 \Rightarrow x\geqslant 2/3.$$

Утверждения Ани и Вити ещё слабее. Если мы знаем, что $x>2/3$, то уже можно не добавлять, что x положительный, а тогда и выражение x^2+5x+3 положительно:

$$x>2/3 \Rightarrow x\geqslant 2/3 \Rightarrow x>0 \Rightarrow x^2+5x+3>0.$$

Наконец, рассмотрим утверждение Даши. Мы разложили квадратный трёхчлен на множители и видим, что его корнями являются числа $x=8/9$ и $x=1$. Значит, Даша сообщает нам, что x равен одному из двух чисел: то ли 8/9, то ли 1. Из Дашиного утверждения следует, что x точно больше 2/3, а значит и все остальные утверждения из него тоже вытекают. Итак, получаем схему

$$9x^2-17x+8=0 \Rightarrow x>2/3 \Rightarrow x\geqslant 2/3 \Rightarrow x>0 \Rightarrow x^2+5x+3>0.$$

и делаем вывод, что достаточно было сообщить только Дашино утверждение, все остальные из него бы следовали. $\square$

$\boxed{\star \rightarrow}$ **Пример 7*.** Решить неравенство $(2x-3)^2+\sqrt{-x-1}>20$.

Решение. Неравенство выглядит пугающе. И квадрат, и корень. Мы таких не решали.

Попробуем вывести из имеющих данных хоть какое-нибудь *следствие*. Что можно с уверенностью сказать про число x, удовлетворяющее этому неравенству?

Во всяком случае, для всех решений нашего неравенства выражение $\sqrt{-x-1}$ должно быть определено, то есть $-x-1\geqslant 0$. А теперь попробуем использовать этот вывод для оценки величины левой части выражения:

$$-x-1\geqslant 0 \Leftrightarrow -1\geqslant x \Leftrightarrow x\leqslant -1 \Leftrightarrow 2x\leqslant -2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x-3\leqslant -5 \Rightarrow |2x-3|\geqslant 5 \Leftrightarrow (2x-3)^2\geqslant 25 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (2x-3)^2+\sqrt{-x-1}\geqslant 25 \Rightarrow (2x-3)^2+\sqrt{-x-1}>20.$$

Итак, наше неравенство верно для всех допустимых значений переменных.

Ответ. $(-\infty;-1]$.

Задача 43. Равносильны ли следующие утверждения? Не забудьте обосновать свой ответ. Там, где возможно, предложите исправление одного из утверждений или дополнительные условия на значения переменных, при которых утверждения станут равносильными.

а) $\boxed{12x^2 - 144x = 180}$ и $\boxed{x^2 - 12x = 15}$

б) $\boxed{(\sqrt{2}-1)x^2 + x = \sqrt{2}}$ и $\boxed{x^2 + (\sqrt{2}+1)x = 2 + \sqrt{2}}$

Λ **в)** $\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$ и $\boxed{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0}$

г) $\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$ и $\boxed{a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{4a}(b^2 - 4ac)}$

д) $\boxed{x^2 = 4 - 2\sqrt{3}}$ и $\boxed{x = \sqrt{3} - 1}$

е) $\boxed{a \geqslant b}$ и $\boxed{ak \geqslant bk}$

ж) $\boxed{x = \sqrt{2}}$ и $\boxed{x^2 = 2}$

з) $\boxed{x < 2\sqrt{2}}$ и $\boxed{x^2 < 8}$

Задача 44. Расставьте стрелки $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$ и $\Rightarrow$ между утверждениями про действительное число x и укажите самое слабое и самое сильное из них

Λ

$\boxed{\text{A. } x > 4}$, $\boxed{\text{C. } x > 3}$, $\boxed{\text{E. } x^2 > 0}$, $\boxed{\text{G. } x = \sqrt{29}}$.
$\boxed{\text{B. } x \geqslant 4}$, $\boxed{\text{D. } -0{,}25x + 1 \leqslant 0}$, $\boxed{\text{F. } x^2 > 9}$,

Задача 45*. Про число x известно, что

$$\sqrt{x-5} + \sqrt{x-7} > 1.$$

Λ Андрей вывел из этого неравенства несколько следствий. Выясните, какие из следствий верны, и выберите среди них самое сильное.

а) $x \geqslant 5$; **в)** $x > 7$; **д)** $\sqrt{x-5} > \sqrt{2}$;
б) $x \geqslant 7$; **г)** $x - 5 \geqslant 2$; **е)** $\sqrt{x-5} + \sqrt{x-7} \geqslant \sqrt{2}$.

? **Вопрос 13.** Как с помощью списка следствий, сделанных в предыдущей задаче, решить неравенство $\sqrt{x-5} + \sqrt{x-7} > 1$?

Задача 46. [8, 5.13] На вопрос, какая завтра будет погода, синоптик верно ответил:
(1) «если не будет ветра, то будет пасмурная погода без дождя»;
(2) «если будет дождь, то будет пасмурно и без ветра»;
(3) «если будет пасмурная погода, то будет дождь и не будет ветра».
Определите погоду на завтра.

З Можно также использовать следующие упражнения на логику из задачника [1]: **стр. 7** B15; **стр. 9** C16; **стр. 38** B15; **стр. 68–69** A10–15, **стр. 112–116** A1, A4–10.

1.4 Числовые неравенства. Линейные неравенства с одной переменной

Задача 47. [9, с.61 №4] Сумма нескольких положительных чисел больше 1. Может ли сумма их квадратов быть меньше 0,001?

Задача 48. [9, с.61 №5] Сумма нескольких положительных чисел меньше 1. Может ли сумма их квадратов быть больше 100?

Задача 49. [9, с.61 №6] Сумма двух положительных чисел больше 10. Может ли их произведение быть меньше 0,001?

Задача 50. [9, с.61 №7] Произведение двух положительных чисел больше 10. Может ли их сумма быть меньше 0,001?

Задача 51. [9, с.61 №8] Стороны прямоугольника увеличили на сантиметр. Может ли его площадь увеличиться более чем на квадратный метр?

Задача 52. [9, с.61 №9] Два положительных числа отличаются не более чем на 0,1. Могут ли их квадраты отличаться более чем на 10?

Задача 53*. [9, с.61 №10] Два положительных числа отличаются не более чем на 0,1. Могут ли их квадратные корни отличаться более чем на 10?

$\boxed{\rightarrow}$ **Пример 8.** Сравнить $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ и $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. Способ 1. *Оценим* обе величины, используя оценки для $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$. Известно, что

$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5, \text{ (поскольку } 1{,}96 < 2 < 2{,}25)$$

поэтому

$$2{,}8 < 2\sqrt{2} < 3$$

С другой стороны,

$$1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8 \text{ (почему?)}$$

$$2{,}7 < 1+\sqrt{3} < 2{,}8$$

Значит,

$$\frac{2{,}7}{3} < \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} < \frac{2{,}8}{2{,}8}$$

$$0{,}9 < \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} < 1$$

А вторая величина оценивается совсем просто:

$$1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$$

$$0{,}85 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 0{,}9$$

Итак, $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ лежит в пределах от 0,9 до 1, а $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ — от 0,85 до 0,9 невключительно. Значит, второе число заведомо меньше.

Способ 2. Между данными величинами стоит некоторый знак: $>$, $<$ или $=$, который мы пока не знаем. Этот знак — наше неизвестное! *Обозначим* его через $\vee$ и будем преобразовывать «неравенство», используя равносильные переходы:

$$\begin{aligned} \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} &\vee \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1+\sqrt{3} &\vee \sqrt{3}\cdot\sqrt{2} \\ (1+\sqrt{3})^2 &\vee (\sqrt{6})^2 \\ 4+2\sqrt{3} &\vee 6 \\ 2\sqrt{3} &\vee 2 \\ \sqrt{3} &\vee 1 \end{aligned}$$

Ясно, что в последнем неравенстве должен быть знак «больше»:

$$\sqrt{3} > 1$$

Значит, искомый знак $\vee$ = «$>$», то есть

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ответ. $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

? **Вопрос 14.** Какой из двух способов решения примера 8 вам больше нравится? Какие преимущества имеет каждый метод?

Задача 54. Расположите в порядке возрастания данные числа

а) $\sqrt{41}$; $2\sqrt{11}$; 6; $7{,}31$;

б) $-1{,}7$; $-\sqrt{3}$; $-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$; $-\dfrac{5}{3}$;

в) $-2-\sqrt{31}$; $-3-4\sqrt{2}$; -8; $-5{,}17$;

г) $\sqrt{5}-3$; $3-2\sqrt{2}$; $0{,}2$; $-\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}$.

Задача 55. Решите неравенство

а) $2\frac{2}{3}x > 4$;

б) $0{,}16 < 2{,}8x - 0{,}37 - 0{,}75(2{,}8x - 0{,}52)$;

в) $(x-2)(x-7) > (x-2)(x+17)$;

г) $-\sqrt{3}x \leqslant 2\sqrt{75}$;

д) $(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2}) < x^2 - 2x$;

е) $\dfrac{x-1}{2} - \dfrac{x-2}{3} \geqslant \dfrac{x}{5}$.

Задача 56. Найдите у числа $\sqrt{0{,}999999999}$ первые **а)** 9; **б*)** 10; **в*)** 18 знаков после запятой.

Задача 57*. [4, №365] Докажите, что $(1{,}01)^{100} > 2$.

З Можно также использовать следующие упражнения на оценки и неравенства из задачника [1]:
стр. 11 B6, B7, B9, B10; **стр. 12–13** C1, C3, C4, C7–11, C15; **стр. 15** A13, A 15, A16; **стр. 17** B14; **стр. 18** C10–C13; **стр. 67–68** A1–A8; **стр. 69** B1, B2;

1.5 Алгебраические дроби

Вспомним основные действия с алгебраическими дробями.

Домножить числитель и знаменатель на один и тот же множитель	$\dfrac{y}{x-y}=\dfrac{y(2x+y)}{(x-y)(2x+y)}$ Эта операция может изменить область определения выражения!
Сократить дробь на общий делитель	$\dfrac{(x+y)(x-y)}{(2x+y)(x-y)}=\dfrac{x+y}{2x+y}$ Эта операция может изменить область определения выражения!
Сложить две дроби с одинаковыми знаменателями	$\dfrac{(x+y)(x-y)}{(2x+y)(x-y)}+\dfrac{y(2x+y)}{(x-y)(2x+y)}=\dfrac{(x+y)(x-y)+y(2x+y)}{(x-y)(2x+y)}$
Вычесть друг из друга две дроби с одинаковыми знаменателями	$\dfrac{(x+y)(x-y)}{(2x+y)(x-y)}-\dfrac{y(2x+y)}{(x-y)(2x+y)}=\dfrac{(x+y)(x-y)-y(2x+y)}{(x-y)(2x+y)}$
Представить дробь в виде суммы двух дробей	$\dfrac{8n+5}{n+4}=\dfrac{8n+32}{n+4}+\dfrac{-27}{n+4}$
Перемножить две дроби	$\dfrac{a^2-b^2}{ab+b}\cdot\dfrac{a^2+a}{a+b}=\dfrac{(a^2-b^2)(a^2+a)}{(ab+b)(a+b)}$
Разделить одну дробь на другую	$\dfrac{4p^2-4p+1}{p+q}:\dfrac{2pq-q}{p^2+pq}=\dfrac{(4p^2-4p+1)(p^2+pq)}{(p+q)(2pq-q)}$ Эта операция может изменить область определения выражения!

Задача 58. Упростите выражения в правой части равенств из строк 3–7 таблицы.

Задача 59. Докажите, что равенства в первой, второй и последней строках таблицы имеют разную область определения левой и правой частей, в отличие от равенств в остальных строках.

Задача 60. Выясните, при каких значениях переменных справедливо равенство

а) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2}{x^2-1}$;

б) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2=4$;

в) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}:\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-7x+12}=1$;

г) $\dfrac{8x^2+8xy}{x+y}-\dfrac{16x^2-8xy-1}{2x-y}=\dfrac{1}{2x-y}$.

З ‖ Рекомендуем использовать раздел 2.2 из задачника [1].

1.6 Модуль

Задача 61. Вычислите
а) $|-9|$; **б)** $|-1|+|0|+|1|$; **в)** $|5|-|-5|$; **г)** $|\sqrt{19}-5|$; **д)** $|3{,}89-\sqrt{3{,}1}|+|0{,}89-\sqrt{3{,}1}|$.

Задача 62. Выясните, при каких значениях переменных выполняются равенства

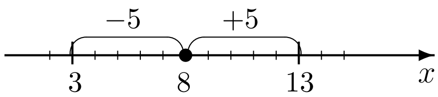
а) $|x| = x$; **в)** $|x-2| = x-2$; **д)** $|x-y| = y-x$;
б) $|x| = -x$; **г)** $|x-y| = |y-x|$; **е)** $|xy| = |x|\cdot|y|$.

Вопрос 15. В чём, по-вашему, сложность работы с модулем? На что важно обращать внимание?

Замечание 6. Вычислить модуль числа легко: достаточно убрать знак «минус», если он есть. Например, $|-7| = 7$. А если «минуса» нет, то и делать ничего не нужно! Однако трудности могут возникнуть, когда под модулем стоит не число, а выражение — числовое или, того хуже, буквенное. Часто мы не знаем, отрицательно или положительно значение выражения. И тогда неясно, что указывает нам модуль: «откинуть минус» или, наоборот, не менять стоящее под ним выражение. Вот что можно предпринять в такой ситуации:

- воспользоваться геометрической интерпретацией и рассмотреть модуль как расстояние между точками на координатной прямой;
- сравнить с нулём выражение, стоящее под модулем (это всегда можно сделать, если выражение числовое, но и у буквенного выражения знак иногда можно определить однозначно);
- раскрыть модуль, рассмотрев случаи разного знака стоящего под ним выражения;
- использовать равносильный переход $|x| = a \Leftrightarrow x = \pm a$;

Пример 9. Решить уравнение $|x-8| = 5$.



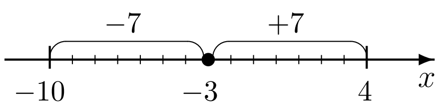
Решение. Способ 1. Отметим на числовой прямой точки с координатой 8 и с координатой x. Тогда $(x-8)$ — это разность этих координат, а $|x-8|$ — длина отрезка между отмеченными точками. Итак, условие $|x-8| = 5$ равносильно утверждению: расстояние от точки x до точки 8 равно 5. Таких точек две — слева и справа от точки 8.

Способ 2. В данном случае легко обойтись и без геометрической интерпретации. Существует только два числа с модулем 5: это 5 и -5. Рассмотрим оба случая:

$$|x-8| = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-8=5 \\ x-8=-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=13 \\ x=3 \end{array}\right.$$

Ответ. 3; 13

Пример 10. Решить неравенство $|x+3| \leqslant 7$.



Решение. Поскольку $|x+3| = |x-(-3)|$, данное неравенство равносильно условию, что расстояние на числовой прямой между точками x и -3 не превосходит 7. Значит, x должен быть не больше, чем $-3+7=4$ и не меньше, чем $-3-7=-10$.

Ответ. $-10 \leqslant x \leqslant 4$.

Пример 11. Решить уравнение $|x-5|-|x+1|=2$.

Решение. Представим себе координатную прямую с отмеченными на ней точками -1, 5, x. Тогда $|x-5|$ и $|x+1|$ будут равны расстояниям от точки x до точек -1 и 5. Значит, нам требуется найти все такие точки координатной прямой, что расстояние от них до точки 5 на 2 больше, чем до точки -1.

Заметим, что длина отрезка с концами -1 и 5 равна 6. Поэтому справа и слева от этого отрезка разность расстояний до его концов будет равна 6, а не 2, как нам нужно. Значит, искомая точка может находиться только внутри отрезка. Две части отрезка длины 6, отличающиеся на 2 – это 4 и 2, значит, точка находится на расстоянии 4 от 5 и на расстоянии 2 от -1, то есть это точка 1.

Ответ. 1.

Пример 12. Известно, что $x \geqslant 4$. Найдите значение выражения

$$|x^2-2x+2|+|8-2x|-x^2.$$

Решение. Попробуем определить знаки выражений, стоящих под модулем.

В первом подмодульном выражении выделим полный квадрат: $x^2-2x+2=(x-1)^2+1$, откуда ясно, что $x^2-2x+2>0$ при всех значениях x! Значит, всегда верно равенство: $|x^2-2x+2|=x^2-2x+2$.

Оценим второе подмодульное выражение. По условию $x \geqslant 4$, значит, $2x \geqslant 8$ и $2x-8 \geqslant 0 \Leftrightarrow 8-2x \leqslant 0$. Значит, $|8-2x|=-(8-2x)=2x-8$.

Итак, при $x \geqslant 4$ получаем:

$|x^2-2x+2|+|8-2x|-x^2=x^2-2x+2+2x-8-x^2=-6$.

Ответ. -6.

Задача 63. Сформулируйте данное условие на геометрическом языке, найдите все подходящие значения x и изобразите их на числовой прямой

а) $|x-34|=9$;
б) $|x-8{,}5|=2{,}5$;
в) $|x+9|=0$;
г) $|x+17|=8$;
д) $|x+1{,}5|=13{,}5$;
е) $|x-1|+|x-5|=3$;
ж) $|x-1|+|x-5|=4$;
з) $|x-1|=|x-5|+2$;
и) $|x-1|+|x-5|=10$;
к) $|x+2|+|x+12|=16$;
л) $|x-4|=|x-24|$;
м) $|x-1|=2|x-9|$;
н) $|x+5|=|x-11|$;
о) $3|x+5|=|x-11|$;
п) $|x+5|=7|x-11|$.

Задача 64. Сформулируйте данное условие на геометрическом языке, найдите все подходящие значения x и изобразите их на числовой прямой

а) $|x-9|<7$;
б) $|x-2{,}5|>4{,}5$;
в) $|x+17|\geqslant 8$;
г) $|-4-x|\leqslant 6$;
д) $|x-2|\geqslant |x-7|$;
е) $|x+1|<|x+4|$;
ж) $|x-2|\leqslant |x-7|+1$;
з) $|x-1|\leqslant |x+4|$;
и) $|x-2|+|x-7|<5$;
к) $|x-2|+|x-7|<7$;
л) $|x-2|+|x-7|\geqslant 7$;
м) $|x-3|+|x+7|\leqslant 8$.

З Также можно решить следующие упражнения с модулем из задачника [1]:
стр. 36: A13; **стр. 38**: B10, B12.

1.7 Графики стандартных функций

Цель этого раздела — очень кратко повторить понятие функции и основные примеры. Вместе с этим материалом (или вместо него) можно использовать прошлогодние материалы для 8 класса, а именно раздел 12.2 «Справочный материал: графики основных функций» и задачи в нём, в том числе игра в парах, см.:
`https://drive.google.com/file/d/19zAQKlJZejK7UE1lBZNsP-DPobwGj3E6/view`.

Замечание 7. Основная идея, которую важно помнить и которая всегда спасёт, если остальное забылось — это *определение графика* функции.

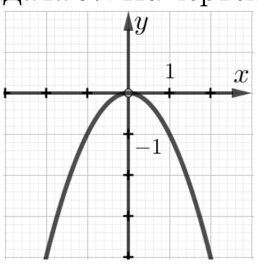
Определение 2. *График функции* f — это множество всех точек с координатами $(x; f(x))$, где x — всевозможные элементы области определения функции.

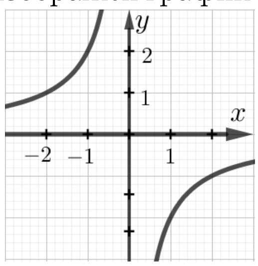
Задача 65. Лежат ли на графике функции $y = \dfrac{\sqrt{x}-8}{5x-6}$ точки:
$A(-4; -5/13)$, $B(0; -1\frac{1}{3})$, $C(64; 0)$, $D(1{,}2; \sqrt{1{,}2}+4)$?

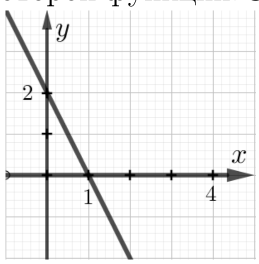
Задача 66. Постройте графики функций f и g и найдите число точек их пересечения

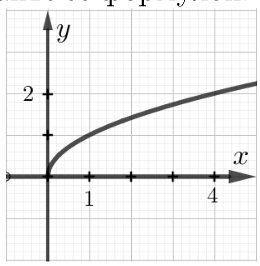
а) $f(x) = x^2$ и $g(x) = 5 - x$; **б)** $f(x) = \dfrac{6}{x}$ и $g(x) = -2$;
в) $f(x) = 2\sqrt{x}$ и $g(x) = 1{,}5 + 0{,}5x$.

Задача 67. На чертеже изображён график некоторой функции. Задайте её формулой.

а) 

б) 

в) 

г) 

Задача 68. Какие из следующих утверждений верны? Не забудьте обосновать ответ.
а) График функции $y = \sqrt{x}$ проходит через точку $(0{,}16; 0{,}04)$.
б) График функции $y = x^2$ называется параболой.
в) Функция $y = x^2$ возрастает на всей числовой прямой.
г) Для любых двух точек на координатной плоскости найдётся единственная линейная функция, график которой проходит как раз через эти две точки.
д) Область определения функции $y = \sqrt{x}$ — множество положительных чисел.
е) Множество значений функции $y = 16/x$ — вся числовая прямая.
ж) График функции $y = -4/x$ не пересекает оси координат.
з) Если график линейной функции проходит через точку $(0; 7)$, то функция может быть задана уравнением вида $y = kx + 7$.
и) График возрастающей линейной функции либо пересекает параболу $y = x^2$ в двух точках, либо не имеет с этой параболой общих точек.
к) Существует линейная функция, график которой в трёх точках пересекает гиперболу, заданную уравнением $y = 1/x$.

Можно также использовать следующие упражнения на функции из задачника [1]: **стр. 189-190** А1, А2; **стр. 191–192** В1–3, В9; **стр. 195–199** А1–8.

1.8 * Задачи с параметром на темы 8 класса

Если в условии задачи есть параметр (или даже несколько параметров), то это означает, что нам предлагается рассмотреть целое семейство задач — при каждом значении параметра (или значени*ях* параметр*ов*) получается своя задача. Отличающаяся от остальных значениями параметров. Точно так же, как часто в разных вариантах контрольной задачи отличаются только значениями некоторых величин. Например, если в одном варианте дано уравнение «$3x^2-5x-6=0$», в другом «$3x^2+2x+1=0$», а в третьем «$3x^2+8x+7=0$», то всю серию данных на контрольную задач можно записать в виде: $3x^2+ax+a-1=0$. Где a — параметр, значение которого разное в разных вариантах. А дальше можно задать какой-нибудь вопрос про эту контрольную. Например: «в каком варианте в ответ попал $x=1$?»

$\boxed{\rightarrow}$ **Пример 13.** При каком значении параметра a число $x=1$ является корнем уравнения $3x^2+ax+a-1=0$?

Замечание 8. *Каждая «задача с параметром» состоит как бы из двух частей*:
1-я часть: условия семейства задач, отличающиеся значениями параметров;
2-я часть: задание на анализ этого семейства задач (часто начинающееся со слов «при каком значении параметра данное уравнение / неравенство /... имеет один корень / не имеет корней / ...»).

В случае примера 13 первая часть — это серия уравнений вида $3x^2+ax+a-1=0$. Вторая часть — это задание найти в этой серии уравнения с корнем $x=1$.

Замечание 9. Мы рассмотрим два подхода к решению задачи с параметром, которые можно комбинировать между собой.

1-й подход. Решить в общем виде всё семейство задач, данных в условии. А потом уже анализировать полученный ответ (зависящий от параметра).

2-й подход. Наоборот, начать с анализа второй части — с задания на исследование, которое нам предстоит выполнить. Может быть, нам не потребуется находить явный вид решения при всех значениях параметра, а удастся из других соображений понять, что искомым свойством обладают только определённые значения параметра.

Решение примера примера 13. Способ 1. Применим первый подход. Квадратное уравнение $3x^2+ax+a-1=0$ имеет дискриминант $D=a^2-12(a-1)$.

$\boxed{?}$ **Вопрос 16.** При всех ли значениях a получившийся дискриминант неотрицателен?

Вне зависимости от ответа на этот вопрос, если корни уравнения есть, то они имеют вид
$$x_{1,2}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-12a+12}}{2}.$$
Поскольку нас спрашивают, когда один из корней равен 1, нам осталось решить два уравнения:
$$1=\frac{-a+\sqrt{a^2-12a+12}}{2} \quad \text{и} \quad 1=\frac{-a-\sqrt{a^2-12a+12}}{2}.$$

Уравнения не слишком простые. В них присутствует и переменная во второй степени, и знак радикала. Нам ещё предстоит учиться решать такие уравнения. Но, возможно, с этими двумя уравнениями вы справитесь уже сейчас.

Задача 69. Завершите первый способ решения примера 13.

Способ 2. Теперь применим второй подход. Не будем решать квадратное уравнение и выписывать дискриминант. Попробуем вместо этого понять, что нас спрашивают. Когда $x = 1$ является корнем уравнения $3x^2 + ax + a - 1 = 0$? Тогда и только тогда, когда $3 \cdot 1^2 + a \cdot 1 + a - 1 = 0$! То есть $3 + 2a - 1 = 0$, то есть $a = -1$.

Ответ. -1.

$\boxed{\rightarrow}$ **Пример 14.** При каких значениях параметра a система $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = a \\ \dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{y} = 1 - a \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение?

Решение. Применим первый подход и бесстрашно решим систему уравнений в общем виде. Чтобы не писать много раз дроби, сделаем замену переменных: $\frac{1}{x} = u$, $\frac{1}{y} = v$. Далее применим метод сложения.

$$\left.\begin{cases} 2u + 3v = a \\ 3u - 2v = 1 - a \end{cases}\right| \begin{matrix} \cdot 2 \\ \cdot 3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u + 6v = 2a \\ 9u - 6v = 3 - 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13u = 3 - a \\ 3u - 2v = 1 - a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} u = \dfrac{3-a}{13} \\ 3u - 1 + a = 2v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{3-a}{13} \\ 2v = \dfrac{3(3-a)}{13} - 1 + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{3-a}{13} \\ 2v = \dfrac{9 - 3a - 13 + 13a}{13} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} u = \dfrac{3-a}{13} \\ 2v = \dfrac{10a - 4}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{3-a}{13} \\ v = \dfrac{5a-2}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{13}{3-a} \\ y = \dfrac{13}{5a-2} \end{cases}$$

Итак, теперь мы знаем, как решается система при каждом значении a. Ответ можно вычислить по формулам $x = \dfrac{13}{3-a}$, $y = \dfrac{13}{5a-2}$. Посмотрим ещё раз на наше решение и заметим, что все переходы, кроме одного, можно выполнить абсолютно при любом значении a. Какой же переход возможен не всегда? Последний, где мы «переворачиваем» дробь. Если окажется, что $u = 0$ или $v = 0$, то найти соответствующий x или y не получится, так как уравнение $\dfrac{1}{x} = 0$ решений не имеет. Итак, система не имеет решений, если

$$\left[\begin{array}{l} 3 - a = 0 \\ 5a - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3 \\ a = 0{,}4 \end{array}\right.$$

Ответ. $a \neq 3$ и $a \neq 0{,}4$.

З Пример 14 аналогичен упражнению С7 со стр. 209 задачника [1]. Также рекомендуем на отработку 1-го подхода упражнения:
стр. 208 С6; **стр. 210** С16,17; **стр. 210–211** С1, С5.

Задача 70. Найдите все a, при которых любое решение системы $\begin{cases} x + y = a \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ удовлетворяет неравенству $x > y$. [*Вступительный экзамен на физфак МГУ, 1977 год*]

$\boxed{?}$ **Вопрос 17.** Какова геометрическая (графическая) интерпретация задачи 70?

$\boxed{\to}$ **Пример 15.** [1, стр.209 С10(а)] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнения имеют хотя бы один общий корень:

$$x^2 + 3x - 9a + 18 = 0 \text{ и } x^2 + 6x - 13a + 25 = 0.$$

Решение. Перед нами квадратные уравнения. Если решить каждое из них, то окажется, что дискриминант первого равен $36a - 63$, дискриминант второго $52a - 64$, а корни $1{,}5(1 \pm \sqrt{4a-7})$ и $3 \pm \sqrt{13a-16}$. Чтобы узнать, есть ли среди корней одинаковые, пришлось бы рассмотреть несколько случаев, какой корень первого уравнения какому корню второго равен, и решать уравнения на a с радикалами.

Попробуем применить второй подход и сразу учитывать, что нам нужен общий корень двух уравнений. Вычтем уравнения друг из друга:

$$x^2 + 3x - 9a + 18 - (x^2 + 6x - 13a + 25) = 0$$
$$x^2 + 3x - 9a + 18 - x^2 - 6x + 13a - 25 = 0$$
$$-3x + 4a - 7 = 0 \Leftrightarrow 4a - 7 = 3x$$

Итак, что если для некоторых x, a выполнены оба равенства, то верно и $3x = 4a - 7$. Подставим это соотношение в первое уравнение, только предварительно домножим его на 9, чтоб не пришлось использовать дроби:

$$x^2 + 3x - 9a + 18 = 0 \Leftrightarrow (3x)^2 + 9 \cdot 3x - 81a + 162 = 0 \Leftrightarrow$$
$$(4a-7)^2 + 9(4a-7) - 81a + 162 = 0 \Leftrightarrow 16a^2 - 56a + 49 + 36a - 63 - 81a + 162 = 0 \Leftrightarrow$$
$$16a^2 - 101a + 48 = 0$$

Итак, если уравнения из условия имеют общий корень, то параметр a удовлетворяет уравнению $16a^2 - 101a + 48 = 0$. Несмотря на большие коэффициенты, оказывается, что дискриминант уравнения равен $729 = 27^2$, а корни $a_1 = 4$, $a_2 = \frac{37}{16}$.

$\boxed{?}$ **Вопрос 18.** Итак, найдены два значения a. Можно ли на этом завершить решение?

Мы использовали «метод следствий»: в самом начале вычли уравнения друг из друга, получив уравнение-следствие. Если условие задачи выполняется, то a может быть только одним из двух найденных значений a_1, a_2. Но верно ли обратное? Будут ли уравнения иметь общий корень при этих значениях a?

Внимательно посмотрим на наши рассуждения. Найденные a удовлетворяют уравнению $16a^2 - 101a + 48 = 0$, а значит и уравнению $(4a-7)^2 + 9(4a-7) - 81a + 162 = 0$. Обозначим теперь $x = \frac{1}{3}(4a-7)$, тогда для этого x будет выполняться равенство $(3x)^2 + 9 \cdot 3x - 81a + 162 = 0$, а значит и $x^2 + 3x - 9a + 18 = 0$. То есть первому уравнению из условия $x = \frac{1}{3}(4a-7)$ удовлетворяет.

$\boxed{?}$ **Вопрос 19.** Как объяснить, что этот x удовлетворяет ещё и второму уравнению?

Итак, оба найденные a подходят, так как $x = \frac{1}{3}(4a-7)$ будет общим корнем.

Ответ. 4; 37/16.

Замечание 10. Можно обойтись без проверки, если с самого начала свести задачу к решению системы из двух уравнений и преобразовывать её равносильными переходами. По сути мы это и делали, но оформили в виде следствий, так что возникли сомнения и пришлось провести рассуждения в обратном направлении.

З В примере 15 мы разобрали упражнение С10(а) со стр.209 задачника [1]. Рекомендуем решить пункт (б), а также: **стр. 209** С11; **стр. 210** С14, С18.

$\boxed{\to}$ **Пример 16.** Найдите все значения a, при каждом из которых уравнения

$$x^2 - (a+2)x + 2a + 2 = 0 \qquad \text{и} \qquad x^2 - (2a+1)x + 4a = 0$$

имеют общий корень.

Решение. Пусть x — общий корень данных уравнений при некотором a. Тогда $(x; a)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 - (a+2)x + 2a + 2 = 0 \\ x^2 - (2a+1)x + 4a = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 - (a+2)x + 2a + 2 - \big(x^2 - (2a+1)x + 4a\big) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(a-1)x = 2(a-1) \quad \Leftrightarrow \quad -ax - 2x + 2a + 2 + 2ax + x - 4a = 0$$

Последнее уравнение можно решить двумя способами.

Способ 1. Сразу хочется разделить на $(a-1)$ и получить, что $x = 2$. Действительно, при всех a подходит корень $x = 2$. Но ещё видно, что при $a = 1$ делить нельзя $(a - 1 = 0)$, зато равенство выполнено при всех x.

Способ 2. Тот же ответ получится, если деление не производить, а перенести всё в одну часть и разложить на множители: $(a-1)x - 2(a-1) = 0 \Leftrightarrow (a-1)(x-2) = 0$.

Итак, мы получили, что

1) при $a = 1$ любой x является корнем разности наших уравнений, и

2) $x = 2$ при любом a является корнем разности наших уравнений.

$\boxed{?}$ **Вопрос 20.** Не пора ли писать ответ к задаче? Но что туда писать?

Рассмотрим две ситуации по порядку.

1) Если $a = 1$ и у одного из исходных уравнений есть какой-то корень, то он обязательно будет и корнем разности, а значит — и корнем второго уравнения, так как второе уравнение получится прибавлением разности к первому уравнению[3].

$\boxed{?}$ **Вопрос 21.** Доказали ли мы, что при $a = 1$ у данных уравнений есть общий корень?

Осталось ещё проверить посылку «если у одного из исходных уравнений есть какой-то корень». Вдруг при $a = 1$ у уравнений вообще нет корней?

Подставим $a = 1$ в первое уравнение, получим: $x^2 - 3x + 4 = 0$. Дискриминант $D = 9 - 4 \cdot 4 < 0$. Так и есть, корней вообще нет, не говоря уже об общих корнях со вторым уравнением…

$\boxed{?}$ **Вопрос 22.** Можно ли сразу сказать, будут ли при $a = 1$ корни у 2-го уравнения?

2) Остался вариант, что $x = 2$ является общим корнем уравнений. Проверим, когда он является корнем первого уравнения:

$$2^2 - (a+2)2 + 2a + 2 = 0 \Leftrightarrow 4 - 2a - 4 + 2a + 2 = 0 \Leftrightarrow 2 = 0$$

Но равенство $2 = 0$ неверно. Значит, $x = 2$ никогда, ни при каких a, не является корнем уравнения $x^2 - (a+2)x + 2a + 2 = 0$.

Таким образом, мы пришли к печальному выводу: данные уравнения ни при каких значениях параметра a не имеют общих корней.

Ответ. Таких a не существует.

Замечание 11. Здесь тоже можно было (наверное, даже: лучше было) решать систему уравнений равносильными переходами, см. замечание 10.

[3] Объясните это утверждение подробнее. Оно действительно верно.

Список литературы

[1] С.А. Шестаков, И.В. Ященко. *Математика. Многоуровневый сборник задач. 7–9 классы. Часть 1. Алгебра.* Москва. Просвещение. 2020.

[2] И.Н. Сергеев. *Математика. Задачи с ответами и решениями.* 2-е издание. Москва. Бином. 2004.

[3] Блинков А.Д. «*Учимся на чужих ошибках*». МЦНМО. 2019.

[4] И.М. Гельфанд, А. Шень. *Алгебра.* МЦНМО. 4-е изд. 2017. `https://www.mccme.ru/free-books/shen/gelfand-shen-algebra.pdf`

[5] Алфутова Н.Б., Устинов А. В. «*Алгебра и теория чисел*». МЦНМО. 2002. `https://www.mccme.ru/free-books/pdf/alfutova.pdf`

[6] Информационно-поисковая система «Задачи по геометрии» `http://zadachi.mccme.ru/`

[7] М.А. Волчкевич. *Уроки геометрии в задачах. 7–8 классы.* МЦНМО, 2016.

[8] И.В. Раскина. *Логика для всех. От пиратов до мудрецов*. МЦНМО. 2016.

[9] Александр Шень (под ред.). *Задачи по математике, предлагавшиеся ученикам математического класса 57 школы* (выпуск 2000 года, класс В) (с1). М.: МЦНМО, 2000, 272 с. `https://www.mccme.ru/free-books/57/shen.pdf`