

**ГАОУ ВО «Дагестанский государственный университет народного
хозяйства»**

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

Гаджиев Малла Азизович

Учебно-методическое пособие

Производная функции и ее применение



Махачкала 2018

УДК 51(075)
ББК 22.1 я 7

Составитель – Гаджиев Малла Азизович – старший преподаватель кафедры математики Дагестанского государственного университета народного хозяйства.

Внутренний рецензент: Атагишиева Гульнара Солтанмурадовна – к.ф.м.н., доцент, заведующая кафедрой информатики Дагестанского государственного университета народного хозяйства

.

В пособии дается основной теоретический материал в краткой форме по теме «Производная функции» и примеры применения ее для исследования поведения функции. Рассматриваются подробные решения задач на применение производной к исследованию функции. Пособие предназначено для студентов 1-х, 2-х курсов СПО.

Гаджиев М.А., Производная функции и ее применение. Учебно-методическое пособие по математике. – Махачкала: ДГУНХ, 2018г., 29с.

Учебно-методическое пособие размешено на сайте www.dgunh.ru.

Содержание

Введение - - - - -	4
1. Понятие производной - - - - -	6
2. Геометрический смысл производной - - - - -	8
3. Физический смысл производной - - - - -	10
4. Изучение функции с помощью производной - - - - -	14
4.1 Возрастание и убывание функции. Экстремум функции - - - - -	14
4.2 Достаточные условия убывания и возрастания функции - - - - -	20
4.3 Правило нахождения экстремума - - - - -	21
4.4 Точка перегиба графика функции - - - - -	22
4.5 Общая схема исследования функции и построение ее графика - - - - -	27
Список литературы- - - - -	29

Введение

Понятие функции является одним из основных понятий математики. Оно не возникло сразу в таком виде, как мы им пользуемся сейчас, а, как и другие фундаментальные понятия прошло длинный путь диалектического и исторического развития. Идея функциональной зависимости восходит к древнегреческой математике. Например, изменение площади, объема фигуры в зависимости от изменения ее размеров. Однако древними греками идея функциональной зависимости осознавалась интуитивно.

Уже в 16 - 17 в. в, техника, промышленность, мореходство поставили перед математикой задачи, которые нельзя было решить имеющимися методами математики постоянных величин. Нужны были новые математические методы, отличные от методов элементарной математики.

Впервые термин "функция" вводит в рассмотрение знаменитый немецкий математик и философ Лейбниц в 1694 г. Однако, этот термин (определения он не дал вообще) он употребляет в узком смысле, понимая под функцией изменение ординаты кривой в зависимости от изменения ее абсциссы. Таким образом, понятие функции носит у него "геометрический налет". В современных терминах это определение связано с понятием множества и звучит так: «Функция есть произвольный способ отображения множества $A = \{a\}$ во множество $B = \{b\}$, по которому каждому элементу $a \in A$ поставлен в соответствие определенный элемент $b \in B$. Уже в этом определении не накладывается никаких ограничений на закон соответствия (этот закон может быть задан Формулой, таблицей, графиком, словесным описанием). Главное в этом определении: $\forall a \in A \rightarrow \exists ! b \in B$. Под элементами множеств A и B понимаются при этом элементы произвольной природы.

В математике XVII в. самым же большим достижением справедливо считается изобретение дифференциального и интегрального исчисления. Сформировалось оно в ряде сочинений Ньютона и Лейбница и их ближайших учеников. Введение в математику методов анализа бесконечно

малых стало началом больших преобразований. Но наряду с интегральными методами складывались и методы дифференциальные. Вырабатывались элементы будущего дифференциального исчисления при решении задач, которые в настоящее время и решаются с помощью дифференцирования. В то время такие задачи были трех видов: определение касательных к кривым, нахождение максимумов и минимумов функций, отыскивание условий существования алгебраических уравнений квадратных корней.

Первый в мире печатный курс дифференциального исчисления опубликовал в 1696 г. Лопиталь. Этот курс состоит из предисловия и 10 глав, в которых излагаются определения постоянных и переменных величин и дифференциала, объясняются употребляющиеся обозначения dx , dy , и др.

Появление анализа бесконечно малых революционизировало всю математику, превратив ее в математику переменных величин.

Исследование поведения различных систем (технические, экономические, экологические и др.) часто приводит к анализу и решению уравнений, включающих как параметры системы, так и скорости их изменения, аналитическим выражением которых являются производные. Такие уравнения, содержащие производные, называются дифференциальными.

В своей же работе я хочу подробнее остановиться на приложениях производной.

1. Понятие производной

При решении различных задач геометрии, механики, физики и других отраслей знания возникла необходимость с помощью одного и того же аналитического процесса из данной функции $y=f(x)$ получать новую функцию, которую называют производной функцией (или просто производной) данной функции $f(x)$ и обозначают символом

$$y' = f'(x) \text{ или } \frac{dy}{dx}$$

Тот процесс, с помощью которого из данной функции $f(x)$ получают новую функцию $f'(x)$, называют дифференцированием и состоит он из следующих трех шагов: 1) даем аргументу x приращение Δx и определяем соответствующее приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$; 2) составляем отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

3) считая x постоянным, а $\Delta x \rightarrow 0$, находим

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

который обозначаем через $f'(x)$, как бы подчеркивая тем самым, что полученная функция зависит лишь от того значения x , при котором мы переходим к пределу. Определение: Производной $y' = f'(x)$ данной функции $y=f(x)$ при данном x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю, если, конечно, этот предел существует, т.е. конечен. Таким образом,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \text{ или } y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

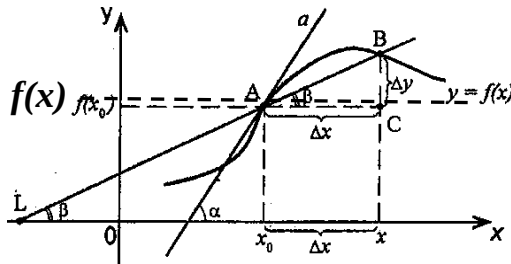
Заметим, что если при некотором значении x , например, при $x=a$, отношение

$$\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

при $\Delta x \rightarrow 0$ не стремится к конечному пределу, то в этом случае говорят, что функция $f(x)$ при $x=a$ (или в точке $x=a$) не имеет производной или не дифференцируема в точке $x=a$.

2. Геометрический смысл производной

Рассмотрим график функции $y = f(x)$, дифференцируемой в окрестностях точки x_0



Рассмотрим произвольную прямую, проходящую через точку графика функции - точку $A(x_0, f(x_0))$ и пересекающую график в некоторой точке $B(x; f(x))$. Такая прямая (AB) называется секущей. Из $\triangle ABC$: $AC = \Delta x$; $BC = \Delta y$; $\operatorname{tg} \beta = \Delta y / \Delta x$.

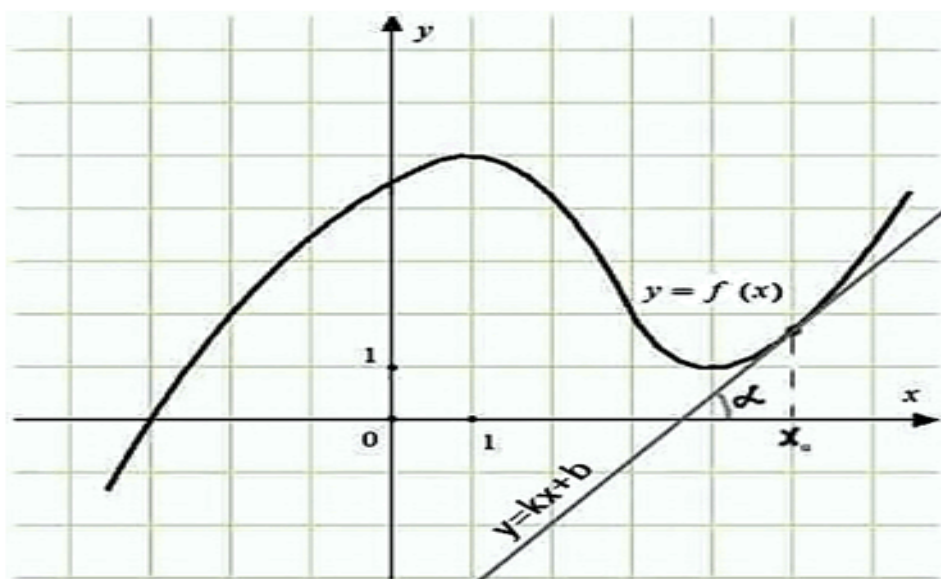
Так как $AC \parallel OX$, то $\angle ALO = \angle BAC = \beta$ (как соответственные при параллельных). Но $\angle ALO$ - это угол наклона секущей AB к положительному направлению оси OX. Значит, $\operatorname{tg} \beta = k$ - угловой коэффициент прямой AB.

Теперь будем уменьшать Δx , т.е. $\Delta x \rightarrow 0$. При этом точка B будет приближаться к точке A по графику, а секущая AB будет поворачиваться. Предельным положением секущей AB при $\Delta x \rightarrow 0$ будет прямая (a), называемая касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке A.

Если перейти к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$ в равенстве $\operatorname{tg} \beta = \Delta y / \Delta x$, то получим $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ или $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$, так как $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha$ α -угол

наклона касательной к положительному направлению оси OX $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$, по определению производной. Но $\operatorname{tg} \alpha = k$ - угловой коэффициент касательной, значит, $k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$.

Построим произвольный график некой функции $y = f(x)$ на координатной плоскости, построим касательную в точке x_0 , обозначим угол между прямой и осью ox как α (альфа).



Из курса алгебры известно, что уравнение прямой имеет вид: $y = kx + b$.

Производная функции в точке есть угловой коэффициент касательной к графику этой функции в этой точке. В этом и состоит геометрический смысл производной.

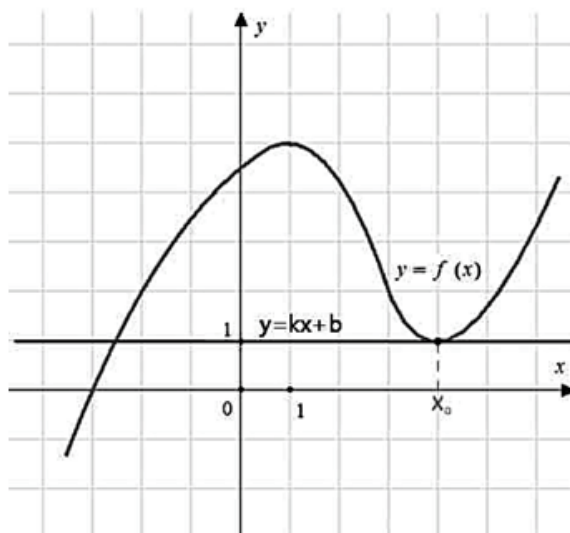
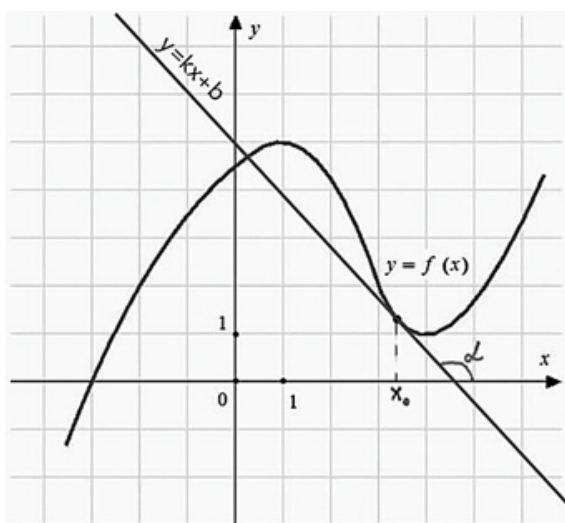
То есть производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной: $y' = f'(x) = k$.

А угловой коэффициент в свою очередь равен тангенсу угла α (альфа), т.е.: $y' = f'(x) = k = \operatorname{tg} \alpha$

Угол α (альфа) может быть меньше, больше 90 градусов или равен нулю.

Проиллюстрируем, два случая:

1. Угол наклона касательной больше 90 градусов (тупой угол).
2. Угол наклона касательной равен нулю градусов (касательная параллельна оси Ox).



То есть задачи, в которых дан график функции, касательная к этому графику в определённой точке, и требуется найти производную в точке касания, сводятся к нахождению углового коэффициента касательной (либо тангенса угла наклона касательной, что одно и то же).

3. Физический смысл производной.

Рассмотрим движение точки по прямой. Пусть задана координата точки в любой момент времени $x(t)$. Известно (из курса физики), что средняя скорость за промежуток времени $[t_0; t_0 + \Delta t]$ равна отношению расстояния, пройденного за этот промежуток времени, на время, т.е. $V_{ср} = \Delta x / \Delta t$. Перейдем к пределу в последнем равенстве при $\Delta t \rightarrow 0$. $\lim V_{ср}(t) = v(t_0)$ - мгновенная скорость в момент времени t_0 , $\Delta t \rightarrow 0$. а $\lim \Delta x / \Delta t = x'(t_0)$ (по определению производной). Итак, $v(t) = x'(t)$.

Физический смысл производной заключается в следующем: производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 - это скорость изменения функции $f(x)$ в точке x_0 .

Производная применяется в физике для нахождения скорости по известной функции координаты от времени, ускорения по известной функции скорости от времени. $v(t) = x'(t)$ - скорость, $a(t) = v'(t)$ - ускорение, или $a(t) = x''(t)$. Если известен закон движения материальной точки по окружности, то можно найти угловую скорость и угловое ускорение при

вращательном движении: $\varphi = \varphi(t)$ - изменение угла от времени, $\omega = \varphi'(t)$ - угловая скорость, $\varepsilon = \varphi''(t)$ - угловое ускорение, или $\varepsilon = \varphi''(t)$.

Если известен закон распределения массы неоднородного стержня, то можно найти линейную плотность неоднородного стержня: $m = m(x)$ - масса, $x \in [0; l]$, l - длина стержня, $\rho = m'(x)$ - линейная плотность. С помощью производной решаются задачи из теории упругости и гармонических колебаний. Так, по закону Гука $F = -kx$, x – переменная координата, k - коэффициент упругости пружины. Положив $\omega^2 = k/m$, получим дифференциальное уравнение пружинного маятника $x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$, где $\omega = \sqrt{k/m}$ частота колебаний ($1/c$), k - жесткость пружины (H/m). Уравнение вида $y'' + \omega^2 y = 0$ называется уравнением гармонических колебаний (механических, электрических, электромагнитных). Решением таких уравнений является функция $y = A \sin(\omega t + \varphi_0)$ или $y = A \cos(\omega t + \varphi_0)$, где A - амплитуда колебаний, ω - циклическая частота, φ_0 - начальная фаза.

Понятие производной сложной функции

Пусть y – сложная функция x , т.е. $y = f(u)$, $u = g(x)$, или

$$y(x) = f[g(x)].$$

Если $g(x)$ и $f(u)$ – дифференцируемые функции своих аргументов соответственно в точках x и $u = g(x)$, то сложная функция также дифференцируема в точке x и находится по формуле

$$y'(x) = f'(u) g'(x)$$

Таблица производных элементарных функций	Таблица производных сложных функций
1. $(c)' = 0$ 2. $(x)' = 1$ 3. $(x^n)' = n x^{n-1}$ 4. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ 5. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}, (x > 0)$	1. $(u^n)' = n u^{n-1} \cdot u'$ 2. $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$ 3. $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$ 4. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u', (u > 0)$ 5. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$ $a > 0, a \neq 1, u > 0$

7. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, a > 0, a \neq 1, x > 0$ 8. $(e^x)' = e^x$ 9. $(a^x)' = a^x \ln a, a > 0, a \neq 1$ 10. $(\sin x)' = \cos x$ 11. $(\cos x)' = -\sin x$ 12. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ 13. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ 14. $(shx)' = chx$ 15. $(chx)' = shx$ 16. $(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}$ 17. $(cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}$ 18. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$ 19. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$ 20. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 21. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	6. $(e^u)' = e^u \cdot u'$ 7. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$ $a > 0, a \neq 1$ 8. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$ 9. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$ 10. $(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$ 11. $(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$ 12. $(shu)' = chu \cdot u'$ 13. $(chu)' = shu \cdot u'$ 14. $(thu)' = \frac{1}{ch^2 u} \cdot u'$ 15. $(cthu)' = -\frac{1}{sh^2 u} \cdot u'$ 12. $(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$ 13. $(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$ 14. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$ 15. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
Основные правила дифференцирования	
1. $(cu)' = c \cdot u', 2. (u \pm v)' = u' \pm v', 3. (u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u, 4. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}.$	

Рассмотрим примеры.

1) $y = \ln x^2$

$$y'(x) = (\ln x^2)' = \frac{1}{x^2} \cdot (x^2)' = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x} \quad (x \neq 0)$$

2) $y = \ln^2 x$

$$y'(x) = (\ln^2 x)' = 2 \cdot \ln x \cdot (\ln x)' = 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

3) $y = \cos x^3$

$$y'(x) = -\sin x^3 \cdot (x^3)' = -\sin x^3 \cdot 3x^2$$

$$4) \ y = \cos(3x + 2)$$

$$y'(x) = -\sin(3x + 2) \cdot (3x + 2)' = -3\sin(3x + 2)$$

$$5) \ y = \sin^3 x$$

$$y'(x) = 3\sin^2 x \cdot (\sin x)' = 3\sin^2 x \cos x$$

$$6) \ y = 3^{\cos x}$$

$$y'(x) = 3^{\cos x} \cdot \ln 3 \cdot (\cos x)' = -3^{\cos x} \ln 3 \sin x$$

$$7) \ y = (\sqrt{x} - 2)^7$$

$$y'(x) = 7(\sqrt{x} - 2)^6 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{7(\sqrt{x} - 2)^6}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0)$$

$$8) \ y = e^{\sin x}$$

$$y'(x) = e^{\sin x} \cdot (\sin x)' = e^{\sin x} \cos x$$

$$9) \ y = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$$

$$y'(x) = \frac{1}{a} \left(\arctan \frac{x}{a} \right)' = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a} \right)^2} \cdot \left(\frac{x}{a} \right)' = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a} \right)^2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{\frac{a^2 + x^2}{a^2}} = \frac{1}{x^2 + a^2}$$

4. Изучение функции с помощью производной

4.1 Возрастание и убывание функции. Экстремум функции

Определение 1. Функция $f(x)$ называется возрастающей в интервале (a,b) , если при возрастании аргумента x в этом интервале соответствующие значения функции $f(x)$ также возрастают, т.е. если $f(x_2) > f(x_1)$ при $x_2 > x_1$.

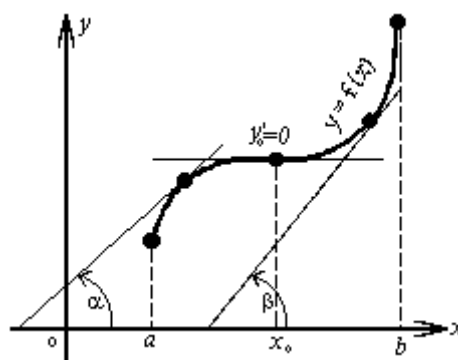
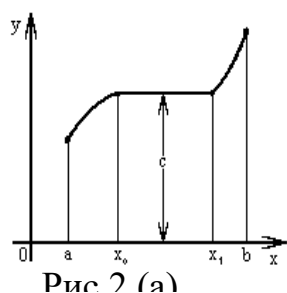


Рис.1 (а)

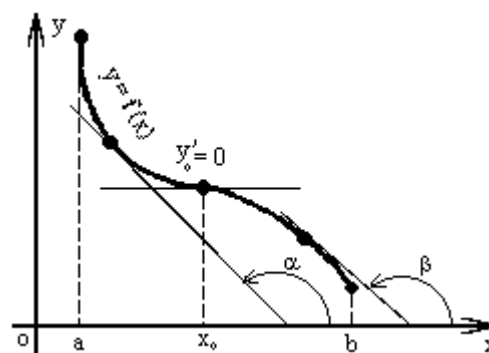
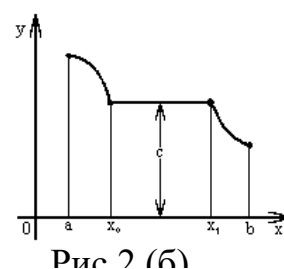


Рис.1 (б)

Из этого определения следует, что у возрастающей в интервале (a,b) функции $f(x)$ в любой точке этого интервала приращения Δx и Δy имеют одинаковые знаки. График возрастающей функции показан на рисунке 1(а). Если из неравенства $x_2 > x_1$ вытекает нестрогое неравенство $f(x_2) \geq f(x_1)$, то функция $f(x)$ называется неубывающей в интервале (a, b) . Пример такой функции показан на рисунке 2(а). На интервале $[x_0, x_1]$ она сохраняет

постоянное значение C Определение 2. Функция $f(x)$ называется убывающей в интервале (a, b) если при возрастании аргумента x в этом интервале соответствующие значения функции $f(x)$ убывают, т.е. если $f(x_2) < f(x_1)$ при $x_2 > x_1$.

Из этого определения следует, что у убывающей в интервале (a, b) функции $f(x)$ в любой точке этого интервала приращения Δx и Δy имеют разные знаки. График убывающей функции показан на рисунке 1(б).

Если из неравенства $x_2 > x_1$ вытекает нестрогое неравенство $f(x_2) \leq f(x_1)$, то функция $f(x)$ называется невозрастающей в интервале (a, b) . Пример такой функции показан на рисунке 2(б). На интервале $[x_0, x_1]$ она сохраняет постоянное значение C .

Теорема 1. Дифференцируемая и возрастающая в интервале (a, b) функция $f(x)$ имеет во всех точках этого интервала неотрицательную производную.

Теорема 2. Дифференцируемая и убывающая в интервале (a, b) функция $f(x)$ имеет во всех точках этого интервала неположительную производную.

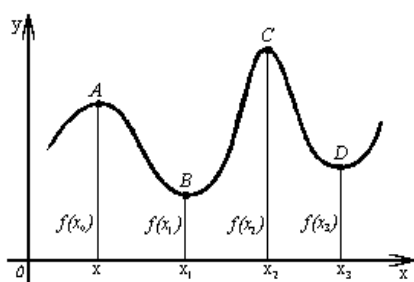


Рис. 3

Пусть данная непрерывная функция убывает при возрастании x от x_0 до x_1 , затем при возрастании x от x_1 до x_2 - возрастает, при дальнейшем возрастании x от x_2 до x_3 она вновь убывает и так далее. Назовем такую функцию колеблющейся. График колеблющейся функции показан на рисунке 3. Точки A, C , в которых функция переходит от возрастания к убыванию, так

же, как и точки В, D, в которых функция переходит от убывания к возрастанию, называются точками поворота или критическими точками кривой $y = f(x)$, а их абсциссы - критическими значениями аргумента x . В той точке, где функция переходит от возрастания к убыванию, ордината больше соседних с ней по ту и другую сторону ординат. Так, ордината точки А больше ординат, соседних с ней справа и слева и достаточно к ней близких, т.е. значение функции в точке А, абсцисса которой равна x_0 , больше значений функции в точках, абсциссы которых достаточно близки к x_0 :

$$f(x_0) > f(x_0 + \Delta x).$$

На рисунке 4(а) изображена функция $f(x)$, непрерывная в интервале (a, b) . В интервале $(a, x_0]$ она возрастает, на интервале $[x_0, x_1]$ - сохраняет постоянное значение: $f(x_0) = f(x_1) = C$, в интервале $[x_1, b)$ - убывает. Во всех точках, достаточно близких к x_0 (или x_1), значения функции $f(x)$ удовлетворяют нестрогому неравенству $f(x_0) \geq f(x)$.

Значение $f(x_0)$ функции $f(x)$, при котором выполняется вышеуказанное неравенство, называется максимальным значением функции $f(x)$ или просто максимумом. Определение 3. Максимумом функции $f(x)$ называется такое значение $f(x_0)$ этой функции, которое не меньше всех значений функции $f(x)$ в точках x , достаточно близких к точке x_0 , т.е. в точках x , принадлежащих

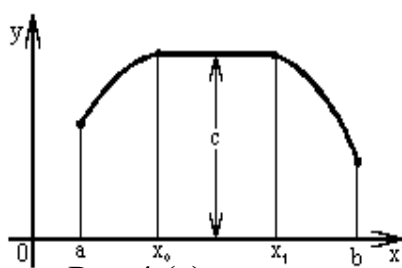


Рис.4 (а)

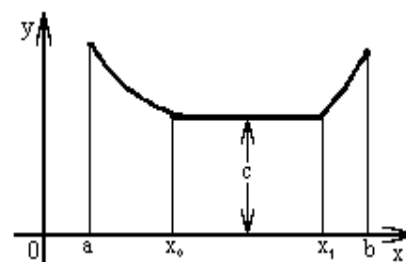


Рис.4 (б)

некоторой достаточно малой окрестности точки x_0 . Так, на рисунке 3 показаны два максимума: $f(x_0)$ и $f(x_2)$. В той точке, где функция переходит от убывания к возрастанию, ордината меньше ординат в достаточно близких к ней точках, расположенных справа и слева от нее. Так ордината точки В меньше ординат в точках соседних и достаточно близких к точке x_1 справа и слева. Значение функции в точке, абсцисса которой равна x_1 , меньше значений функции в точках, абсциссы которых достаточно мало отличаются от x_1 : $f(x_1) < f(x_1 + \Delta x)$.

На рисунке 4(б) изображена функция $f(x)$, непрерывная в интервале (a, b) . В интервале $(a, x_0]$ она убывает, на интервале $[x_0, x_1]$ - сохраняет постоянное значение: $f(x_0) = f(x_1) = C$, в интервале $[x_1, b)$ - возрастает. Во всех точках, достаточно близких к x_0 (или x_1), значения функции $f(x)$ удовлетворяют нестрогому неравенству $f(x_0) \leq f(x)$.

Значение $f(x_0)$ функции $f(x)$, при котором выполняется вышеуказанное неравенство, называется минимальным значением функции $f(x)$ или просто минимумом. Определение 4. Минимумом функции $f(x)$ называется такое значение $f(x_0)$ этой функции, которое не больше всех значений функции $f(x)$ в точках x , достаточно близких к точке x_0 , т.е. в точках x , принадлежащих некоторой достаточно малой окрестности точки x_0 . Так, на рисунке 3 показаны два минимума: $f(x_1)$ и $f(x_3)$. По определению наибольшим значением функции $f(x)$ на интервале $[a, b]$ является такое значение $f(x_0)$, для которого для всех точек интервала $[a, b]$ выполняется неравенство $f(x_0) \geq f(x)$, а наименьшим значением функции $f(x)$ на интервале $[a, b]$ является такое значение $f(x_0)$, для которого для всех точек интервала $[a, b]$ выполняется неравенство $f(x_0) \leq f(x)$. Из этих определений следует, что функция может достигать своего наибольшего или наименьшего значения как внутри интервала $[a, b]$, так и на его концах a и b . Здесь же максимум и минимум функции $f(x)$ были определены, соответственно, как наибольшее и наименьшее значения в некоторой окрестности точки x_0 . Если в точке x_0 функция $f(x)$ достигает максимума или минимума, то говорят, что функция f

$f(x)$ в точке x_0 достигает экстремума (или экстремального значения). Функция $f(x)$ может иметь несколько экстремумов внутри интервала $[a, b]$, причем может оказаться, что какой-нибудь минимум будет больше какого-нибудь максимума. Таким образом, наибольшее значение функции $f(x)$ на интервале $[a, b]$ - это наибольший из экстремумов функции внутри этого интервала и наибольшее из значений функции на концах интервала. Аналогично наименьшее значение функции $f(x)$ на интервале $[a, b]$ - это наименьший из экстремумов функции внутри этого интервала и наименьшее из значений функции на концах интервала.

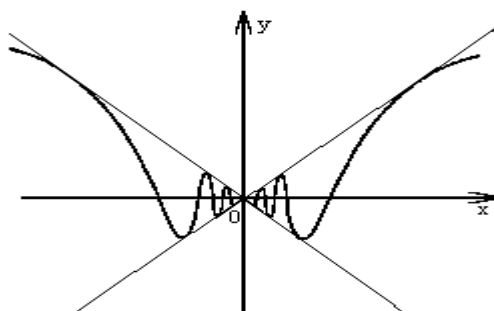


Рис.5

Например функция, изображенная на рисунке 3, достигает наибольшего значения $f(x)$ в точке x_2 , наименьшего - в точке x_1 интервала $[x_0, x_3]$. На рисунке 5 изображена функция, имеющая бесконечное число минимумов и максимумов.

Теорема 3 (необходимый признак экстремума). Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, то ее производная в данной точке или равна нулю или не существует. Но функция $f(x)$ может иметь экстремумы и в тех точках x_0 , в которых ее производная не существует. Например, функция $y = |x|$ в точке $x_0 = 0$ не дифференцируема, но достигает минимума. Точки такого типа называют угловыми. В них кривая не имеет определенной касательной.

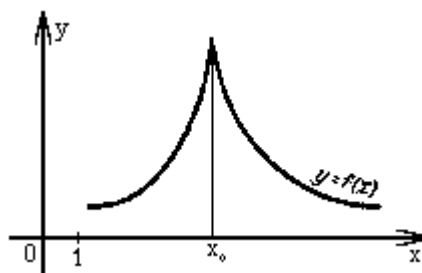


Рис. 6

На рисунке 6 изображена функция $f(x)$, не имеющая в точке x_0 производной [$f'(x_0) = 0$] и достигающая в этой точке максимума. При $x > x_0$ и $x < x_0$ $f'(x) = f'(x_0)$, при $x < x_0$ и при $x > x_0$ $f'(x) = f'(x_0)$. Значит касательная к кривой $y = f(x)$ при $x = x_0$ перпендикулярна к оси Ox . Такие точки называются точками возврата кривой $y = f(x)$. Таким образом, необходимым признаком существования в точке x_0 экстремума функции $f(x)$ является выполнение следующего условия: в точке x_0 производная $f'(x)$ или равна нулю, или не существует. Этот признак не является достаточным условием существования экстремума функции $f(x)$ в точке x_0 : можно привести много примеров функций, удовлетворяющих этому условию при $x = x_0$, но, однако, не достигающих экстремума при $x = x_0$. Например, производная функции $y = x^3$ при $x_0 = 0$ равна нулю, однако эта функция при $x_0 = 0$ не достигает экстремального значения.

Пример. Найти промежутки монотонности и экстремумы функции $f(x) = x^3 - 3x^2$

Решение: Найдем первую производную функции $f'(x) = 3x^2 - 6x$

Найдем критические точки по первой производной, решив уравнение $3x^2 - 6x = 0$; $3x(x - 2) = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 2$.

Исследуем поведение первой производной в критических точках и на промежутках между ними.

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	<i>возрастает</i>	<i>max</i>	<i>убывает</i>	<i>min</i>	<i>возрастает</i>

$$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0$$

$$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = -4$$

Ответ: Функция возрастает при $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$; функция убывает при $x \in (0; 2)$; точка минимума функции $(2; -4)$; точка максимума функции $(0; 0)$.

Самостоятельно:

1) Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$.

2) Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = 2x^2 - \ln x$.

3) Найти экстремумы функции $f(x) = \frac{8\sqrt{x}}{x+1}$

4) Найти интервалы возрастания и убывания и экстремумы функции $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x - 1$

5) Найти промежутки монотонности и экстремумы функции $f(x) = 8x + \frac{x^4}{4}$

4.2 Достаточные условия убывания и возрастания функции. Достаточные условия экстремума функции

Теорема 4. Если функция $f(x)$ имеет в каждой точке интервала (a, b) неотрицательную производную, то она является неубывающей функцией в этом интервале. Теорема 5. Если функция $f(x)$ в каждой точке интервала (a, b) имеет неположительную производную, то она является невозрастающей функцией в этом интервале.

Теорема 6. (первый достаточный признак экстремума). Если производная $f'(x)$ функции $f(x)$ обращается в нуль в точке x_0 или не существует и при переходе через x_0 меняет свой знак, то функция $f(x)$ имеет в

этой точке экстремум (максимум, если знак меняется с "+" на "-", и минимум, если знак меняется с "-" на "+"). Теорема 7. (второй достаточный признак существования экстремума функции). Если в точке x_0 первая производная $f'(x)$ функции $f(x)$ обращается в нуль, а её вторая производная $f''(x)$ отлична от нуля, то в точке x_0 функция $f(x)$ достигает экстремума (минимума, если $f''(x) > 0$, и максимума, если $f''(x) < 0$). Предполагается, что $f''(x)$ непрерывна в точке x_0 и ее окрестности.

4.3 Правило нахождения экстремума

1. Чтобы найти экстремум функции, надо:

1) найти производную данной функции;

2) приравнять производную нулю и решить полученное уравнение; из полученных корней отобрать действительные и расположить их (для удобства) по их величине от меньшего к большему; в том случае, когда все корни оказываются мнимыми, данная функция не имеет экстремума;

3) определить знак производной в каждом из промежутков, отграниченных стационарными точками (стационарными точками называют точки в которых производная равна 0);

4) если производная положительна в промежутке, лежащем слева от данной стационарной точки, и отрицательна в промежутке, лежащем справа от нее, то данная точка есть точка максимума функции, если же производная отрицательна слева и положительна справа от данной стационарной точки, то данная точка есть точка минимума функции; если производная имеет один и тот же знак как слева, так и справа от стационарной точки, то в этой точке нет ни максимума, ни минимума, функции;

5) заменить в данном выражении функции аргумент значением, которое дает максимум или минимум функции; получим значение соответственно максимума или минимума функции.

Если функция имеет точки разрыва, то эти точки должны быть

включены в число стационарных точек, разбивающих Ox на промежутки, в которых определяется знак производной.

4.4 Точка перегиба графика функции

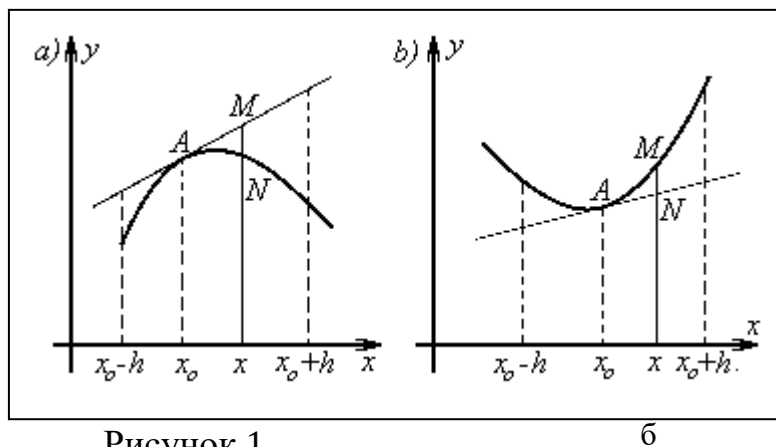


Рисунок 1

б

Будем говорить, что кривая $y = f(x)$ в точке x_0 обращена выпуклостью вверх, если существует такая окрестность точки x_0 , что часть кривой, соответствующая этой окрестности, лежит под касательной к этой кривой, проведенной в точке A с абсциссой x_0 . (см. Рисунок 1а).

Будем говорить, что кривая $y = f(x)$ в точке x_0 обращена выпуклостью вниз, если существует такая окрестность точки x_0 , что часть кривой, соответствующая этой окрестности, лежит над касательной к этой кривой, проведенной в точке A с абсциссой x_0 . (см. Рисунок 1б).

Из определения выпуклости вверх (вниз) кривой $y = f(x)$ в точке x_0 следует, что для любой точки x из интервала $(x_0 - h, x_0 + h)$, не совпадающей с точкой x_0 , имеет место неравенство $f(x) - y < 0$ ($f(x) - y > 0$) где $f(x)$ - ордината точки M кривой $y = f(x)$, y - ордината точки N касательной $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ к данной кривой в точке A . (смотри рисунок 1, а, б).

Ясно, что и наоборот, если для любой точки x интервала $(x_0 - h, x_0 + h)$, не совпадающей с x_0 , выполняется неравенство $f(x) - y < 0$ ($f(x) - y > 0$), то кривая $y = f(x)$ в точке x_0 обращена выпуклостью вверх (вниз). Будем

называть кривую $y = f(x)$ выпуклой вверх (вниз) в интервале (a, b) , если она выпукла вверх (вниз) в каждой точке этого интервала. Если кривая $y = f(x)$ обращена выпуклостью вверх в интервале (a, b) , то с увеличением аргумента x угловой коэффициент касательной к этой кривой в точке с абсциссой x будет уменьшаться.

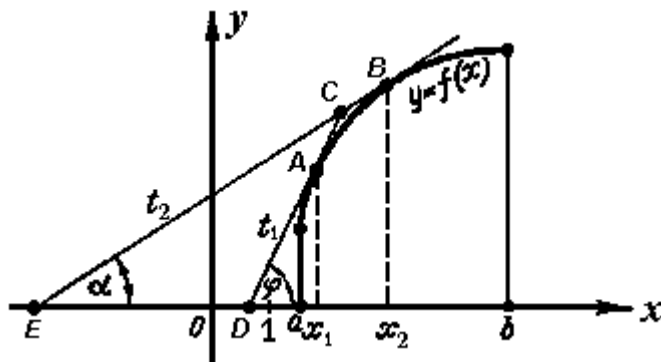


Рисунок 2.

В самом деле, пусть абсцисса x_1 точки A меньше абсциссы x_2 точки B (рис. 2). Проведем касательные t_1 и t_2 соответственно в точках A и B к кривой $y = f(x)$. Пусть α и φ - углы наклона касательных t_1 и t_2 . Тогда из рис. 2 видим, что φ - внешний угол треугольника ECD, а поэтому он больше угла α . Следовательно $\tan \varphi > \tan \alpha$ или $f'(x_1) > f'(x_2)$.

Таким образом, мы показали, что если в интервале (a, b) кривая $y = f(x)$ обращена выпуклостью вверх, то с увеличением аргумента x функция $y = f'(x)$ убывает. Поэтому вторая производная $f''(x)$ функции $f(x)$, как производная убывающей функции $f'(x)$, будет отрицательна или равна нулю в интервале (a, b) : $f''(x) \leq 0$.

Если кривая $y = f(x)$ обращена выпуклостью вниз, то из рис.2

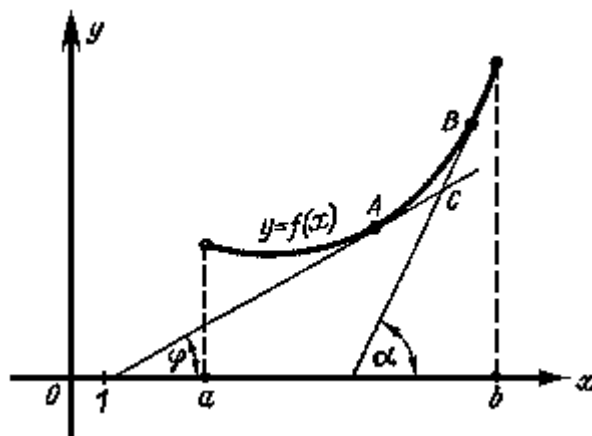


Рисунок 3.

непосредственно видно, что $\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \varphi$ т.е. $f'(x_2) > f'(x_1)$, а поэтому в интервале (a, b) производная $f'(x)$ возрастает. Тогда вторая производная $f''(x)$ функции $f(x)$, как производная возрастающей в интервале (a, b) функции $f'(x)$, будет положительна или равна нулю: $f''(x) \geq 0$.

Докажем, что и наоборот, если $f''(x) \leq 0$ в некотором интервале (a, b) , то в этом интервале кривая $y = f(x)$ обращена выпуклостью вверх; если $f''(x) \geq 0$ в интервале (a, b) , то в этом интервале кривая обращена выпуклостью вниз. Запишем уравнение касательной $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ к кривой $y = f(x)$ в точке x_0 , где $a < x_0 < b$, в виде $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$. Очевидно, $y_0 = f(x_0)$, а потому последнее уравнение можно записать в виде $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
(1)

Но, согласно формуле Тейлора, при $n = 2$ имеем:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \quad (2)$$

Фиксируя x в интервале (a, b) и вычитая почленно из уравнения (2) уравнение (1), получим:

$$f(x) - y = \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \quad (3)$$

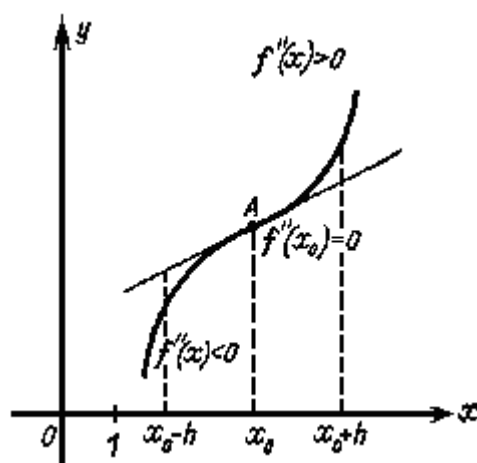


Рисунок 4.

Точка кривой, в которой кривая меняет направление изгиба, т.е. переходит от выпуклости вверх к выпуклости вниз или наоборот, называется точкой перегиба кривой (рис.4). (В этом определении предполагается, что в точке перехода кривой от выпуклости вверх к выпуклости вниз (или наоборот) имеется единственная касательная). Теорема 8. Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную вторую производную $f''(x)$ и пусть $A [x_0; f(x_0)]$ - точка перегиба кривой $y = f(x)$. Тогда $f''(x_0) = 0$ или не существует. Доказательство. Рассмотрим для определенности случай, когда кривая $y = f(x)$ в точке перегиба $A [x_0; f(x_0)]$ переходит от выпуклости вверх к выпуклости вниз (рис.4). Тогда при достаточно малом h в интервале $(x_0 - h, x_0)$ вторая производная $f''(x)$ будет меньше нуля, а в интервале $(x_0, x_0 + h)$ - больше нуля. Но $f''(x)$ - функция непрерывная, а потому, переходя от отрицательных значений к положительным, она при $x = x_0$ обращается в нуль: $f''(x_0) = 0$.

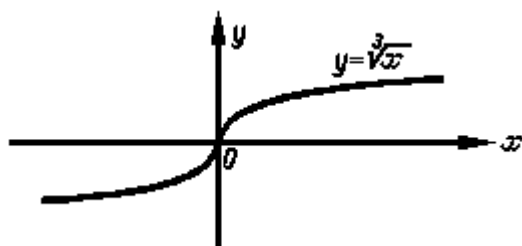


Рисунок 5.

На рис.5 изображен график функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Хотя при $x_0 = 0$ имеется касательная и точка перегиба, все же вторая производная $f''(x)$ не равна нулю, она даже не существует в этой точке. В самом деле, имеем

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad f'(0) \rightarrow \infty, \quad f''(x) = -\frac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}}$$

Итак, $f''(0)$ не существует. Но тем не менее точка $O(0; 0)$ является точкой перегиба, так как при $x < 0$ $f''(x) > 0$ и кривая выпукла вниз, а при $x > 0$ $f''(x) < 0$ и кривая выпукла вверх.

Таким образом в случае непрерывности второй производной $f''(x)$ обращение в нуль или несуществование ее в какой-нибудь точке кривой $y = f(x)$ является необходимым условием существования точки перегиба. Однако это условие не является достаточным.

Теорема 9. Если вторая производная $f''(x)$ непрерывна и меняет знак при $x = x_0$, то точка $A[x_0; f(x_0)]$ является точкой перегиба кривой $y = f(x)$ при условии, конечно, что в точке A существует касательная.

Доказательство. Пусть например $f''(x) < 0$ при $x_0 - h < x < x_0$ и $f''(x) > 0$ при $x_0 < x < x_0 + h$. Тогда в интервале $(x_0 - h; x_0)$ кривая $y = f(x)$ обращена выпуклостью вверх, а в интервале $(x_0; x_0 + h)$ - выпуклостью вниз (смотри рис.4), т.е. точка $A[x_0; f(x_0)]$ есть точка перегиба кривой, что и требовалось доказать.

4.5 Общая схема исследования функции и построение ее графика

1. Находим область определения функции $f(x)$
2. Находим точки пересечения кривой $y = f(x)$ с осями координат и наносим их на чертеж.
3. Определяем, симметрична ли кривая $y = f(x)$ относительно осей координат и начала координат.
4. Исследуем функцию $y = f(x)$ на непрерывность. Если функция имеет в точке x_0 разрыв, то отмечаем ее на чертеже.
5. Находим асимптоты кривой, если они имеются.
6. Находим максимум и минимум функции и отмечаем на чертеже точки кривой с максимальной и минимальной ординатами.
7. Исследуем кривую $y = f(x)$ на выпуклость вверх или вниз, находим точки перегиба кривой и отмечаем их на чертеже.
8. Вычерчиваем кривую $y = f(x)$.

Пример: Исследовать функцию $y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ и построить ее график.

Решение: 1. Область определения $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$, т.е. $x \neq \pm 1$.

2. Функция четная, так как $f(-x) = f(x)$, и ее график симметричен относительно оси ординат.

3. Вертикальные асимптоты могут пересекать ось абсцисс в точках $x = \pm 1$. Так как пределы функции при $x \rightarrow 1 - 0$ (слева) и при $x \rightarrow 1 + 0$ (справа)

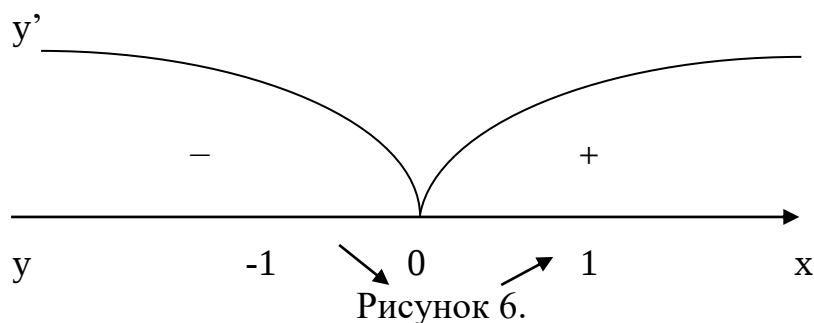
бесконечны, т.е. $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1+x^2}{1-x^2} = -\infty$ и $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1+x^2}{1-x^2} = +\infty$, то прямая $x=1$ есть вертикальная асимптота. В силу симметрии графика $f(x)$ $x=-1$ также вертикальная асимптота.

4. Поведение функции в бесконечности. Вычислим $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x^2}{1-x^2} = -1$. В силу четности имеем также $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+x^2}{1-x^2} = -1$ - горизонтальная асимптота.

5. Экстремумы и интервалы монотонности.

Найдем $y' = \frac{2x(1-x^2) - (1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$; $y'=0$ при $x=0$ и y' не существует при $x \neq \pm 1$.

Однако критической является только точка $x_1 = 0$ (так как значения $x \neq \pm 1$ не входят в область определения функции). Поскольку при $x < 0$ $f'(x) < 0$, а при $x > 0$ $f'(x) > 0$ (рисунок 6), то $x=0$ – точка минимума и $f_{\min} = f(0) = 1$ – минимум функции. На интервалах $(-\infty; -1)$ и $(-1; 0)$ функция убывает, на интервалах $(0; 1)$ и $(1; \infty)$ – возрастает.



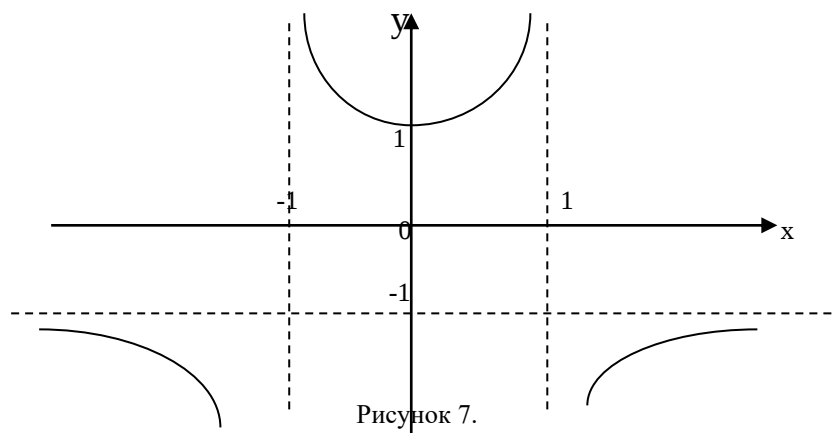
6. Интервалы выпуклости и точки перегиба.

Найдем: $y'' = \frac{4(1-x^2)^2 - 4x \cdot 2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4} = \frac{4(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}$

Очевидно, что $y'' > 0$ на интервале $(-1; 1)$ и функция выпукла вниз на этом интервале. $y'' < 0$ на интервалах $(-\infty; -1)$, $(1; \infty)$, и на этих интервалах функция выпукла вверх. Точек перегиба нет.

7. Точки пересечения с осями $f(0) = 1$, т.е. точка пересечения с осью ординат $(0; 1)$. Уравнение $f(x) = 0$ решений не имеет, следовательно, график функции не пересекает ось абсцисс.

График функции изображен на рисунке 7.



Список литературы:

1. Баврин И. И., Матросов В. Л. Общий курс высшей математики: Учеб. для студентов физ.-мат. спец. пед. вузов. – М.: Просвещение, 2016. – 464 с.
2. Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов/ Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман; Под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ, 2015. – 471 с.
3. Гусак А. А. Математический анализ и дифференциальные уравнения: справочное пособие по решению задач/ А.А. Гусак. – Изд-е 2-е, стереотип. – Мн.: «ТетраСистемс», 2013.
4. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математика для экономистов. – СПб.: Питер, 2012. – 464 с.: ил. – (Серия «Учебное пособие»).