

**ГАОУ ВО
«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА»**

Бабичева Т.А.

Кафедра математики

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

«МАТЕМАТИКА»

МНОГОГРАННИКИ И ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Махачкала – 2019 г.

УДК 512.12.01

ББК 22.15

Бабичева Т.А. Учебное пособие «Многогранники и тела вращения» (для самостоятельной работы студентов) – Махачкала: ДГУНХ, 2019. - 51 с.

Составитель: Бабичева Татьяна Анатольевна – старший преподаватель кафедры математики Дагестанского государственного университета народного хозяйства.

Внутренний рецензент: Гереева Тату Рашидовна, к.э.н., зав. кафедрой прикладной математики и информационных технологий ДГУНХ.

Внешний рецензент: Ибрагимов Мурад Гаджиевич, доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры ДУ и ФА ДГУ.

Учебное пособие «Многогранники и тела вращения» (для самостоятельной работы студентов) размещено на официальном сайте www.dgunh.ru

Цель данного пособия – помочь студентам лучше освоить понятия курса, научить решать задачи по этому разделу математики. Для закрепления теоретических знаний, приобретения навыков в решении задач и с целью самопроверки.

© ГАОУ ВО «ДГУНХ», 2019.

© Бабичева Т.А., 2019.

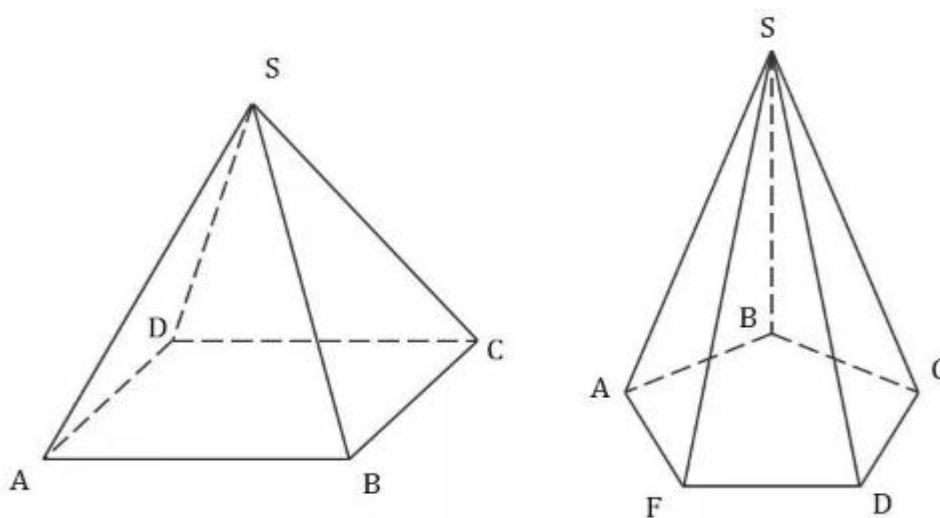
ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Многогранники. Объёмы и площади поверхности	
многогранников	4
1.1. Пирамида	4
1.1.1. Объём пирамиды.....	7
1.1.2. Правильная пирамида	7
1.1.3. Площадь поверхности пирамиды	9
Задачи для самостоятельного решения.....	17
1.2. Призма	16
1.2.1. Прямая призма	17
1.2.2. Правильная призма	18
1.2.3. Параллелепипед	19
1.2.4. Объём и площадь поверхности призмы	20
Задачи для самостоятельного решения.....	28
2. Тела вращения. Объёмы и площади поверхности.	31
2.1. Цилиндр.....	31
Задачи для самостоятельного решения.....	34
2.2. Конус	35
2.3. Усеченный конус.....	37
Задачи для самостоятельного решения.....	42
2.4. Шар	43
Задачи для самостоятельного решения.....	48
ЛИТЕРАТУРА	50

1. Многогранники. Объёмы и площади поверхности многогранников

1.1. Пирамида

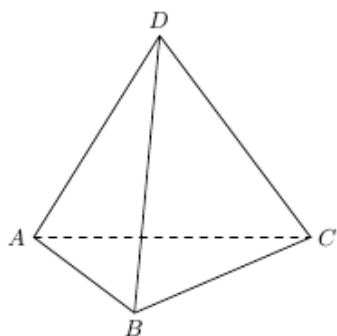
Многогранник, одна грань которого является n -угольником, а остальные грани - треугольники с общей вершиной, называется пирамидой, n -угольник называется основанием пирамиды, а треугольники боковыми гранями.



Общая вершина боковых граней называется вершиной пирамиды.

Отрезки, соединяющие вершину пирамиды с вершинами основания, называются рёбрами пирамиды.

В зависимости от количества сторон основания, пирамиды могут быть треугольными, четырёхугольными, пятиугольными и т. д.

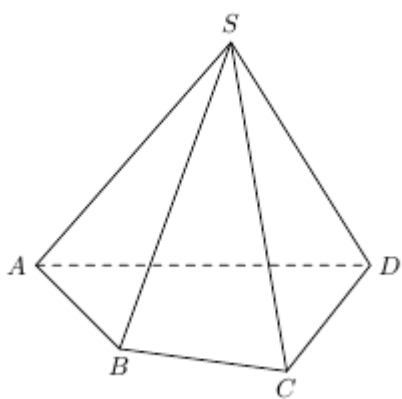


Треугольная пирамида

Самая простая пирамида – это треугольная пирамида, или тетраэдр. На рисунке изображена треугольная пирамида ***ABCD***. Точки ***A***, ***B***, ***C***, ***D*** – это вершины пирамиды. Треугольники ***ABC***, ***ABD***, ***BCD***, ***ACD*** – это грани пирамиды. В основании пирамиды лежит треугольник ***ABC***, и, соответственно,

грань ABC называется основанием пирамиды. Остальные грани – ABD , BCD , ACD – называются боковыми гранями. Понятно, что на какую грань поставишь треугольную пирамиду – та и будет основанием, а остальные грани тогда станут боковыми.

Отрезки AB , BC , AC , AD , BD , CD , являющиеся сторонами граней, называются рёбрами пирамиды. При этом отрезки AD , BD , CD называются также боковыми рёбрами.



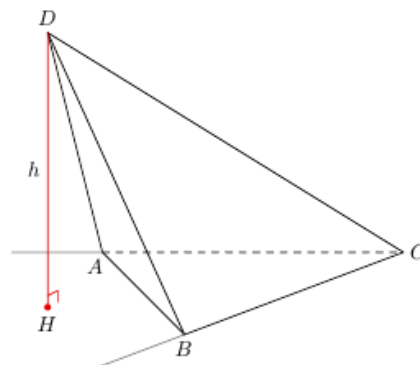
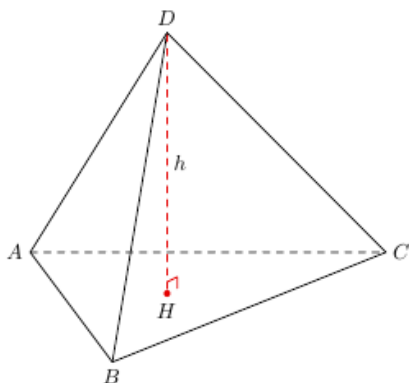
Четырёхугольная пирамида

Пирамида $ABCD S$ четырёхугольная пирамида. Её основанием служит четырёхугольник $ABCD$. Вершиной данной четырёхугольной пирамиды называется точка S . Точки A , B , C , D называются вершинами основания. Отрезки SA , SB , SC , SD , соединяющие вершину пирамиды с вершинами основания, называются

боковыми рёбрами, а треугольники SAB , SBC , SCD и SAD – боковыми гранями пирамиды.

Обратите внимание, что теперь грани не являются равноправными: основание – это четырёхугольник, а боковые грани – треугольники.

Высота пирамиды – это перпендикуляр, проведённый из вершины пирамиды на плоскость её основания. Длина h этого перпендикуляра также называется высотой пирамиды.

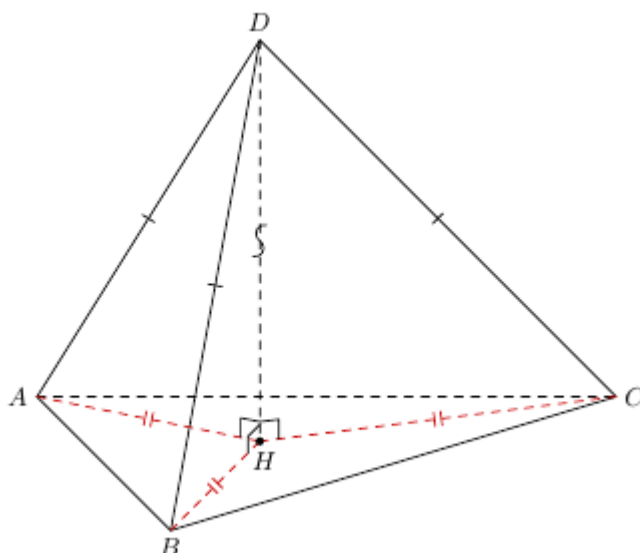


На рисунке изображена треугольная пирамида $ABCD$, из вершины D которой проведена высота DH к плоскости ABC . Точка H лежит в плоскости ABC и называется основанием высоты. Как видите, основание высоты может оказаться где угодно – как внутри грани (левый рисунок), так и вне грани (правый рисунок).

Имеется, однако, важный частный случай, когда, мы можем точно указать, в какую именно точку основания попадёт основание высоты.

Теорема. Если в n -угольной пирамиде боковые рёбра равны, то основание высоты совпадает с центром окружности, описанной вокруг n -угольника, лежащего в основании пирамиды.

Доказательство. Ограничимся рассмотрением треугольной пирамиды (в общем случае доказательство совершенно аналогично). Пусть $ABCD$ – треугольная пирамида с равными боковыми рёбрами, в которой проведена высота DH .

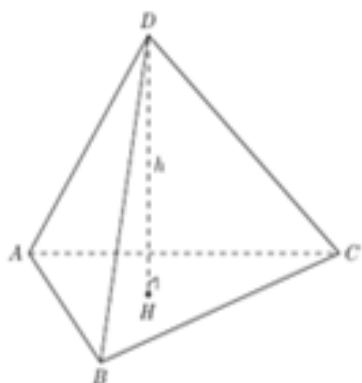


Треугольники ADH , BDH и CDH прямоугольные с общим катетом DH . Их гипотенузы равны, поэтому данные треугольники равны по гипотенузе и катету. Следовательно, равны их вторые катеты: $AH = BH = CH$.

Таким образом, точка H равноудалена от точек A , B , C и потому является центром окружности, описанной вокруг треугольника ABC . Теорема доказана.

Можно запомнить эту теорему и в такой формулировке: *если боковые рёбра пирамиды равны, то вершина пирамиды проектируется в центр описанной вокруг основания окружности.*

1.1.1. Объём пирамиды



Объём пирамиды вычисляется по формуле:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h,$$

где $S_{\text{осн}}$ – площадь основания, h – высота пирамиды.

Для треугольной пирамиды всё равно, какую грань считать основанием (разумеется, в таком случае h будет высотой, опущенной на выбранное основание). Мы можем «поставить» треугольную пирамиду так, как нам удобно, и этот факт часто помогает при решении задач.

1.1.2. Правильная пирамида

Равенство боковых рёбер пирамиды позволяет легче проводить вычисления. Теперь наложим ещё одно дополнительное требование – на сей раз к основанию пирамиды – и придём к важнейшему понятию правильной пирамиды.

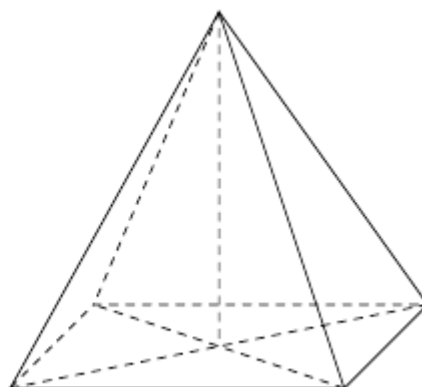
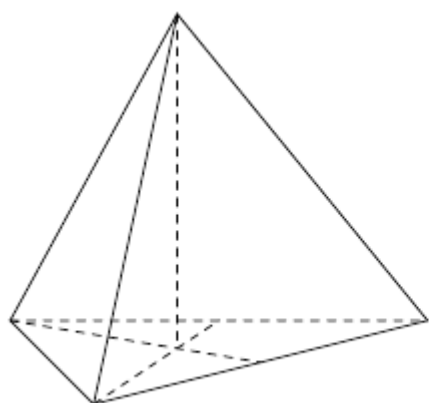
Правильная пирамида – это пирамида, у которой боковые рёбра равны, а в основании лежит правильный n -угольник.

Легко видеть, что вершина правильной пирамиды проектируется в центр симметрии правильного n -угольника, лежащего в её основании. В самом деле, из равенства боковых рёбер следует, что вершина проектируется в центр описанной вокруг основания окружности, который в случае правильного n -угольника совпадает с центром его симметрии.

Чаще всего в задачах встречаются правильная треугольная и правильная четырёхугольная пирамида. Продублируем определение для этих двух случаев.

Правильная треугольная пирамида – это пирамида с равными боковыми рёбрами, основанием которой служит равносторонний треугольник.

Правильная четырёхугольная пирамида – это пирамида с равными боковыми рёбрами, основанием которой служит квадрат.



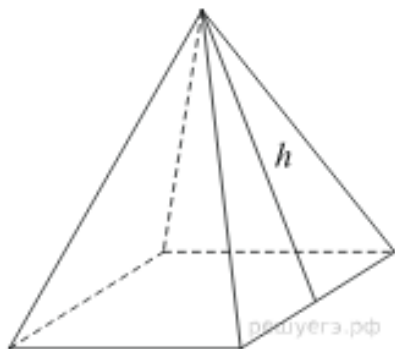
Правильный тетраэдр – это треугольная пирамида, все рёбра которой равны.

Высота боковой грани правильной пирамиды, проведённая из вершины пирамиды, называется **апотемой**.

В правильной треугольной пирамиде боковое ребро может быть не равно стороне основания; иными словами, боковые грани правильной треугольной пирамиды равнобедренные, но не обязательно

равносторонние треугольники. В правильном тетраэдре все четыре грани равносторонние треугольники.

1.1.3. Площадь поверхности пирамиды



Площадь поверхности пирамиды - это сумма площадей всех её граней:

$$S_{\text{поверх}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$$

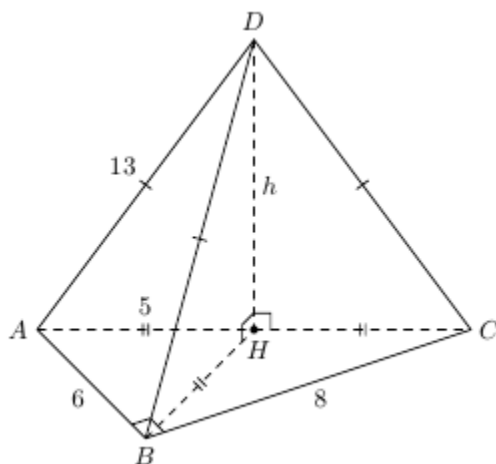
Площадь боковой поверхности пирамиды - это сумма площадей всех её боковых граней.

Примеры решения задач

Задача 1. Найти объём треугольной пирамиды с рёбрами 6, 8, 10, 13, 13, 13.

Решение. Какую грань выбрать в качестве основания? Здесь сомнений нет: естественно, ту, стороны которой равны 6, 8 и 10. Почему?

Прежде всего, треугольник со сторонами 6, 8, 10 является прямоугольным в силу обратной теоремы Пифагора (поскольку $6^2 + 8^2 = 10^2$). Кроме того, при таком выборе основания боковые рёбра пирамиды оказываются равными (13, 13 и 13). Значит, вершина пирамиды проектируется в центр окружности, описанной вокруг основания. Центр окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника находится в середине гипотенузы. Делаем рисунок



В основании нашей пирамиды лежит прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AC . Точка H – середина гипотенузы; $h = DH$ – высота пирамиды.

Площадь основания ABC равна половине произведения катетов:

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$$

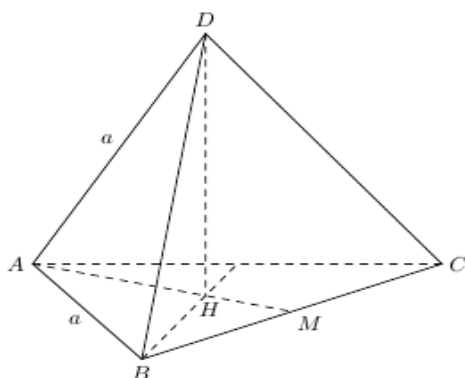
Высоту пирамиды находим по теореме Пифагора:

$$h = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$$

И, наконец, вычисляем объём пирамиды:

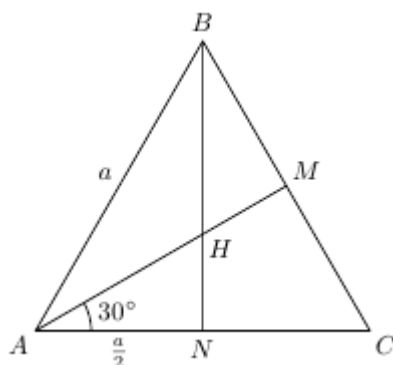
$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 12 = 96.$$

Задача 2. Найти объём правильного тетраэдра со стороной a .



Решение. Нам нужно выразить через a площадь S треугольника ABC и высоту тетраэдра DH . Высоту будем искать из треугольника ADH ; для этого в треугольнике ABC надо будет найти AH .

Сделаем планиметрический чертёж треугольника ABC .



Его площадь проще всего найти как половину произведения сторон на синус угла между ними:

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

Длину отрезка AH находим из прямоугольного треугольника AHN :

$$AH = \frac{AN}{\cos 30^\circ} = \frac{a/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Высоту тетраэдра найдём из прямоугольного треугольника ADH :

$$DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

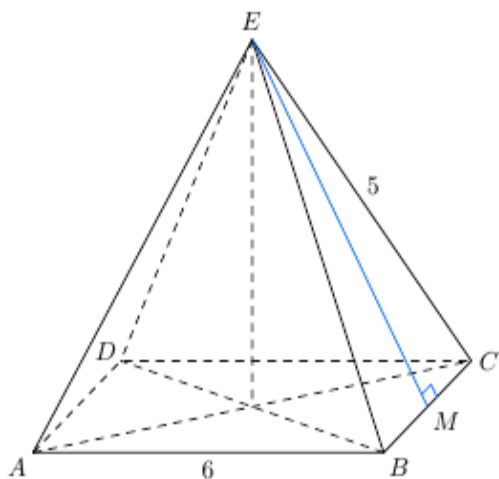
И теперь находим объём:

$$V = \frac{1}{3} S \cdot DH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}.$$

Задача 3.

Найти площадь поверхности правильной четырёхугольной пирамиды, у которой сторона основания равна 6, а боковое ребро равно 5.

Решение. Пусть $ABCDE$ – данная пирамида. Площадь основания



пирамиды равна:

$$S_{\text{осн}} = 6^2 = 36$$

Остаётся найти площадь боковой поверхности. Проведём высоту EM боковой грани пирамиды.

Треугольник BEC равнобедренный; значит, EM является также его медианой, и потому

$MC = 3$. Отсюда

$$EM = \sqrt{EC^2 - MC^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4.$$

Следовательно, площадь S_1 боковой грани равна:

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot EM = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12.$$

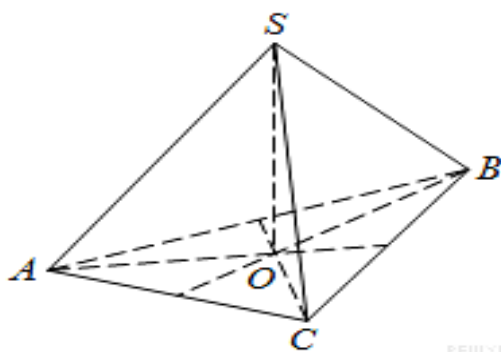
Площадь боковой поверхности:

$$S_{\text{бок}} = 4S_1 = 4 \cdot 12 = 48.$$

Площадь поверхности пирамиды:

$$S = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = 36 + 48 = 84.$$

Задача 4. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке O . Площадь треугольника ABC равна 2; объем пирамиды равен 6. Найдите длину отрезка OS .



Решение Отрезок OS – высота треугольной пирамиды $SABC$, ее объем выражается формулой

$$V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SO.$$

Таким образом, $SO = \frac{3V}{S_{\triangle ABC}} = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9.$

Ответ: 9.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задание 1. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ медианы основания ABC пересекаются в точке O . Площадь треугольника ABC равна 9; объем пирамиды равен 6. Найдите длину отрезка OS .

Задание 2. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ медианы основания ABC пересекаются в точке O . Площадь треугольника ABC равна 2; объем пирамиды равен 4. Найдите длину отрезка OS .

Задание 3. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, точка O – центр основания. S – вершина. $SB = 13$, $AC = 24$. Найдите длину отрезка SO .

Задание 4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O – центр основания, S – вершина, $SO = 8$, $BD = 30$. Найдите боковое ребро SC .

Задание 5. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка K – середина ребра BC , S – вершина. Известно, что $SK = 4$, а площадь боковой поверхности пирамиды равна 54. Найдите длину ребра AC .

Задание 6. Во сколько раз увеличится объем правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в два раза?

Задание 7. Во сколько раз увеличится объем пирамиды, если ее высоту увеличить в четыре раза?

Задание 8. Объем правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равен 12. Точка E - середина ребра SB . Найдите объем треугольной пирамиды $EABC$.

Задание 9. Основанием пирамиды является ромб, сторона которого равна 5 см, а одна из диагоналей равна 8 см. Найдите боковые ребра пирамиды, если высота ее проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 7 см.

Задание 10. Основанием пирамиды является параллелограмм, стороны которого равны 20 см и 36 см, а площадь равна 360 см^2 . Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 12 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Задание 11. Основанием пирамиды является параллелограмм со сторонами 5 м и 4 м и меньшей диагональю 3 м. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 2 м. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

Задание 12. Основанием пирамиды является квадрат, одно из боковых ребер перпендикулярно к плоскости основания. Плоскость боковой грани, не проходящей через высоту пирамиды, наклонена к плоскости основания под углом 45° . Наибольшее боковое ребро равно 12 см. Найдите: а) высоту пирамиды; б) площадь боковой поверхности пирамиды.

Задание 13. Основанием пирамиды $DABC$ является треугольник ABC , у которого $AB = AC = 13$ см, $BC = 10$ см; ребро AD перпендикулярно к плоскости основания и равно 9 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Задание 14. Основанием пирамиды $DABC$ является прямоугольный треугольник ABC , у которого гипотенуза AB равна 29 см, а катет AC равен 21 см. Боковое ребро DA перпендикулярно к плоскости основания и равно 20 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Задание 15. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник с углом 120° . Боковые ребра образуют с ее высотой, равной 16 см, углы в 45° . Найдите площадь основания пирамиды.

Задание 16. Основанием пирамиды $DABC$ является прямоугольный треугольник с гипотенузой BC . Боковые ребра пирамиды равны друг другу, а ее высота равна 12 см. Найдите боковое ребро пирамиды, если $BC = 10$ см.

Задание 17. Основанием пирамиды $DABC$ является равнобедренный треугольник ABC , в котором стороны AB и AC равны, $BC = 6$ см, высота AH равна 9 см. Известно также, что $DA = DB = DC = 13$ см. Найдите высоту пирамиды.

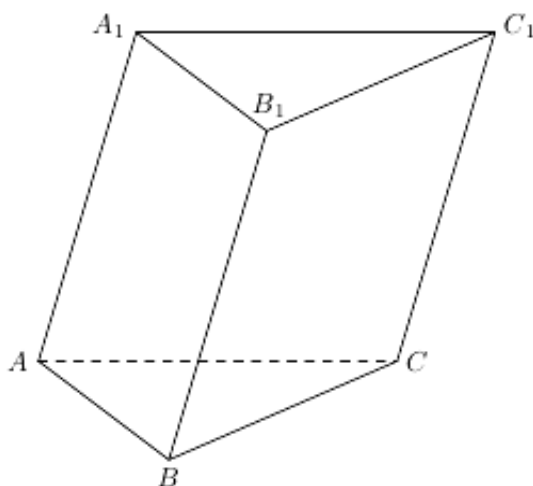
Задание 18. Основанием пирамиды является равнобедренная трапеция с основаниями 6 см и $4\sqrt{6}$ см и высотой 5 см. Каждое боковое ребро пирамиды равно 13 см. Найдите ее высоту.

Задание 19. Ребро CD тетраэдра $ABCD$ перпендикулярно к плоскости ABC , $AB = BC = AC = 6$, $BD = 3\sqrt{7}$. Найдите двугранные углы $DACB$, $DABC$, $BDCA$.

Задание 20. Найдите двугранный угол $ABCD$ тетраэдра $ABCD$, если углы DAB , DAC и ACB прямые, $AC = CB = 5$, $DB = 5\sqrt{5}$. Докажите, что если все ребра тетраэдра равны, то все его двугранные углы также равны. Найдите эти углы.

1.2. Призма

Призма встречается в задачах по стереометрии столь же часто, как и пирамида. Рассмотрим в пространстве треугольник ABC . Предположим, что треугольник $A_1B_1C_1$ лежит в плоскости, параллельной плоскости ABC и получается из треугольника ABC параллельным сдвигом. Соединим соответствующие вершины – A и A_1 , B и B_1 , C и C_1 – и получим треугольную призму $ABC A_1B_1C_1$.

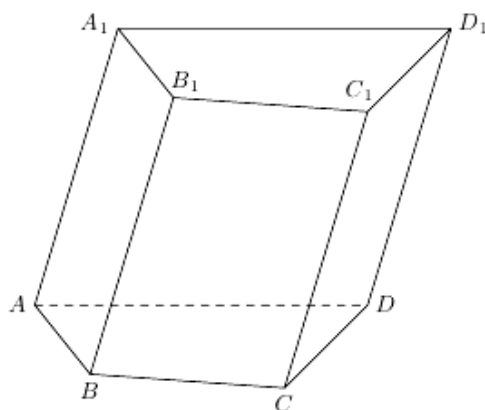


Треугольная призма

Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ называются основаниями призмы. Три параллелограмма ABB_1A_1 , BCC_1B_1 и ACC_1A_1 – это боковые грани призмы. Отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 – это боковые рёбра призмы.

Таким образом, основания треугольной призмы – равные треугольники, лежащие в параллельных плоскостях, а боковые грани – параллелограммы.

Аналогично получается четырёхугольная призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.



Четырёхугольная призма

Основаниями этой призмы служат равные четырёхугольники $ABCD$ и $A_1 B_1 C_1 D_1$, лежащие в параллельных плоскостях. Боковые грани призмы - снова параллелограммы. Отрезки AA_1 , BB_1 , CC_1 и DD_1 - боковые рёбра призмы.

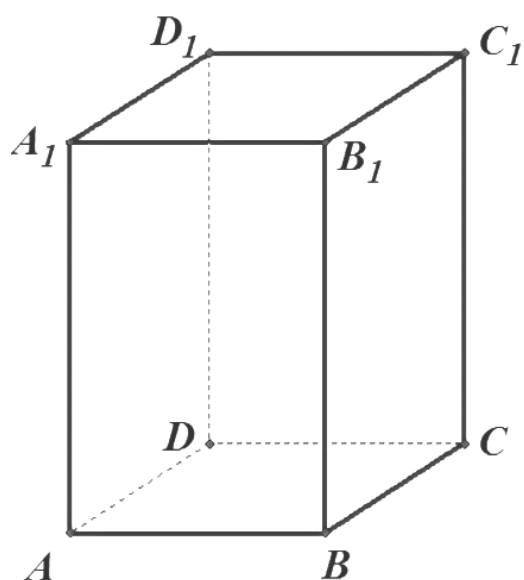
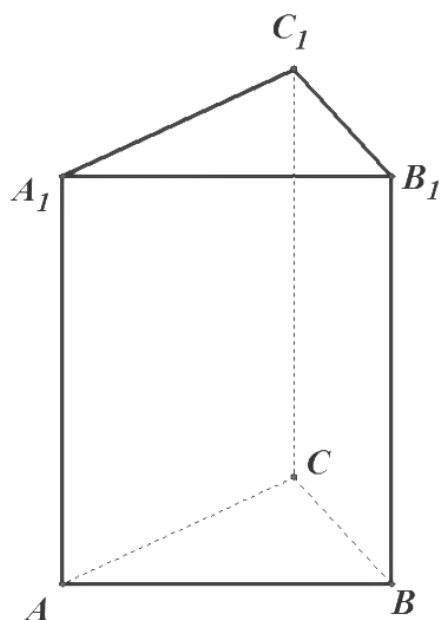
Вообще, в n -угольной призме основаниями служат равные n -угольники, лежащие в параллельных плоскостях, а боковые грани являются параллелограммами. Боковые рёбра призмы, будучи параллельными сторонами параллелограммов, равны друг другу.

На приведенных выше рисунках боковые рёбра призмы наклонены к плоскостям оснований: обе призмы являются наклонными. Однако в задачах и на практике наиболее часто встречается прямая призма.

1.2.1. Прямая призма

Прямая призма – это призма, боковые рёбра которой перпендикулярны плоскостям оснований.

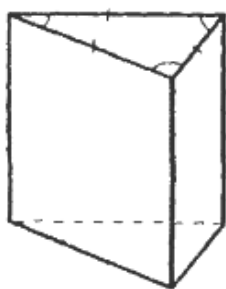
На рисунке изображены две прямые призмы – треугольная и четырёхугольная.



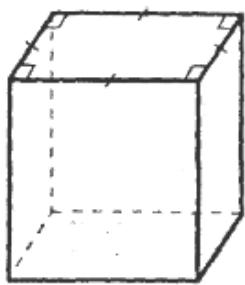
Боковые грани прямой призмы являются прямоугольниками.

1.2.2. Правильная призма

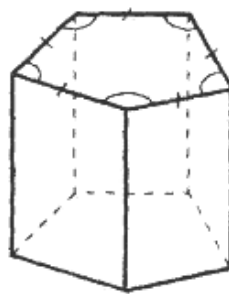
Правильная n -угольная призма – это прямая призма, основанием которой служит правильный n -угольник.



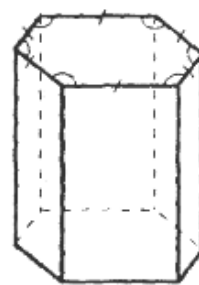
треугольная



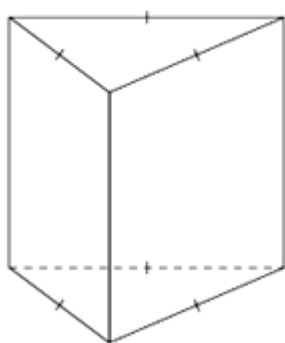
четырехугольная



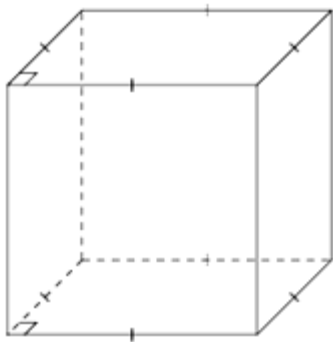
пятиугольная



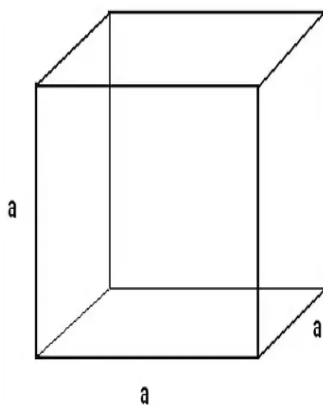
шестиугольная



Правильная треугольная призма – это прямая призма, основанием которой является равносторонний треугольник.



Правильная четырёхугольная призма – это прямая призма, основанием которой является квадрат.



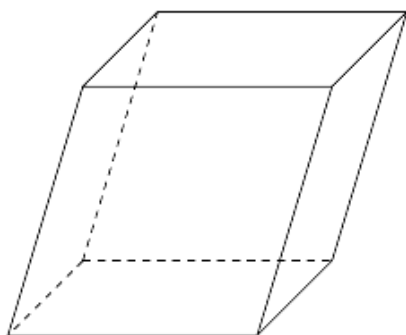
Если боковое ребро правильной четырёхугольной призмы равно стороне основания, то получается хорошо известный вам **куб**.

Боковые грани правильной призмы являются равными прямоугольниками.

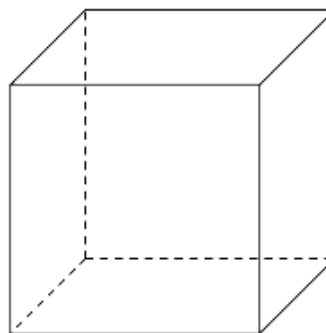
1.2.3. Параллелепипед

Параллелепипед – это призма, основанием которой служит параллелограмм.

Таким образом, все грани параллелепипеда являются параллелограммами. На рисунке изображены наклонный параллелепипед (боковые рёбра которого наклонены к плоскости основания) и прямой параллелепипед (боковые рёбра которого перпендикулярны плоскости основания).

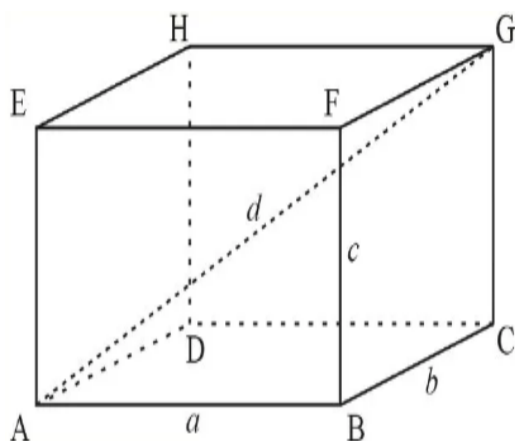


Наклонный параллелепипед



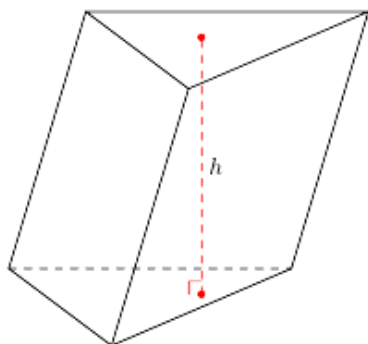
Прямой параллелепипед

Подчеркнём, что в основании (прямого) параллелепипеда может лежать какой угодно параллелограмм. Особый интерес представляет следующий частный случай.



Прямоугольный параллелепипед - это прямая призма, в основании которой лежит прямоугольник. *Диагональю параллелепипеда* называется отрезок, который соединяет вершины параллелепипеда, не принадлежащие одной грани.

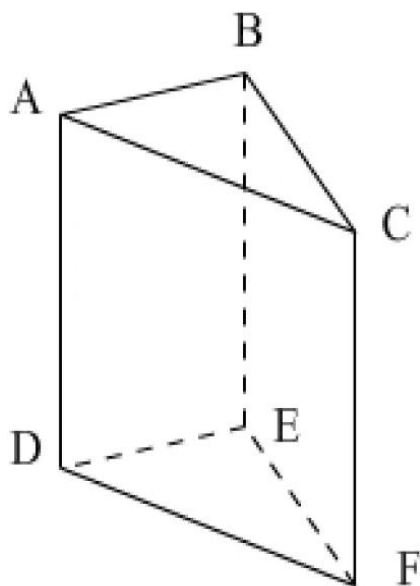
1.2.4. Объём и площадь поверхности призмы



Объём призмы вычисляется по формуле:

$$V = Sh,$$

где S - площадь основания призмы, h - её высота. При этом высотой призмы называется общий перпендикуляр к основаниям призмы (а также длина этого перпендикуляра).



Объём призмы вычисляется по формуле:

$$V = Sh,$$

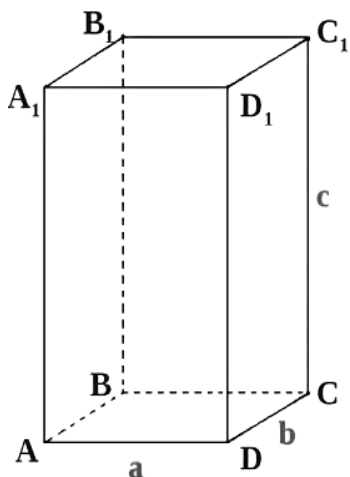
где высота h равна боковому ребру.

Площадь боковой поверхности призмы

– это сумма площадей её боковых граней.

Площадь поверхности призмы – это

сумма площадей всех её граней. Ясно, что площадь поверхности призмы равна сумме площади боковой поверхности и площадей двух оснований.



Если его боковое ребро прямоугольного параллелепипеда равно c , а в основании лежит прямоугольник со сторонами a и b , то площадь основания

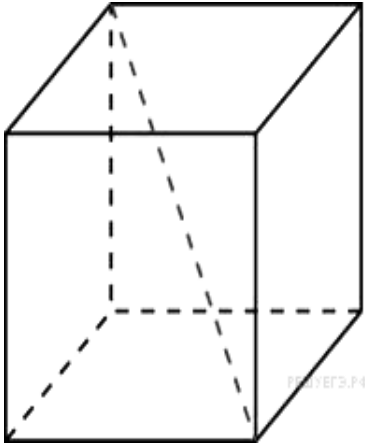
$$S = ab,$$

и тогда объём прямоугольного параллелепипеда вычисляется по формуле:

$$V = abc.$$

Примеры решения задач

Задача 1. Площадь поверхности куба равна 18. Найдите его диагональ.



Решение. Пусть ребро куба равно a , тогда площадь поверхности куба $S = 6a^2$, а диагональ куба $d = a\sqrt{3}$. Тогда

$$d = 3\sqrt{\frac{S}{6}} = \sqrt{\frac{3 \cdot S}{6}} = \sqrt{\frac{S}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

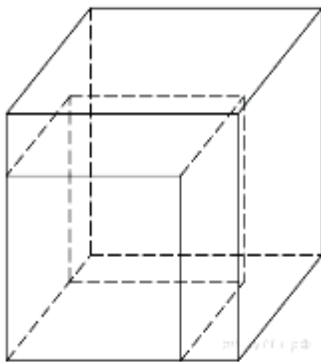
Ответ: 3.

Задача 2. Объем куба равен 8. Найдите площадь его поверхности.

Решение. Площадь поверхности куба выражается через его ребро a формулой $S = 6a^2$, объем - формулой $V = a^3$. Поэтому $a^3 = 8$, откуда $a = 2$, откуда $S = 6 \cdot 2^2 = 24$.

Ответ: 24.

Задача 3. Если каждое ребро куба увеличить на 1, то его площадь поверхности увеличится на 54. Найдите ребро куба.



Решение. Площадь поверхности куба выражается через его ребро a формулой

$$S = 6a^2,$$

поэтому при увеличении длины ребра на 1 площадь увеличится

$$\text{на } S - S_0 = 6(a+1)^2 - 6a^2 = 12a + 6 = 54.$$

Отсюда находим, что ребро куба равно $a = \frac{54-6}{12} = 4$.

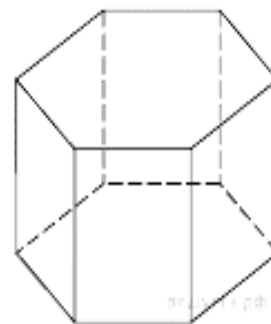
Ответ: 4.

Задача 5. Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, сторона основания которой равна 5, а высота - 10.

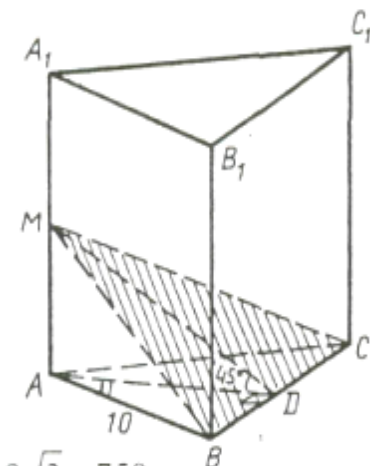
Решение. Площадь боковой поверхности призмы равна сумме площадей всех ее боковых граней:

$$S_{бок} = 6S_{гр} = 6 \cdot 5 \cdot 10 = 300.$$

Ответ: 300.



Задача 6. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ через сторону BC основания и середину M бокового ребра AA_1 проведено сечение, составляющее угол 45° с плоскостью основания. Найдите объем призмы, если сторона ее основания равна 10 см.



Решение.

$$\text{Из } \triangle ABD: AD = 10 \cdot \cos 30^\circ = 5\sqrt{3}.$$

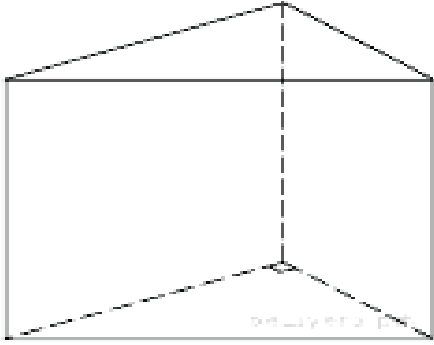
$$\angle MDA = 45^\circ.$$

$$\text{В } \triangle MAD: AM = AD = 5\sqrt{3}.$$

$$AA_1 = 2AM = 10\sqrt{3}.$$

$$V = S_{ABC} \cdot AA_1 = \frac{10^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 10\sqrt{3} = 750.$$

Задача 7. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Площадь ее поверхности равна 288. Найдите высоту призмы.



Решение.

Гипотенуза основания равна 10.

Площадь основания $S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$.

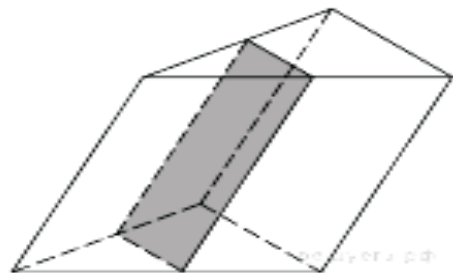
Высоту найдем из выражения для площади поверхности

$$h = \frac{S - 2S_{\Delta}}{P} = \frac{288 - 48}{24} = 10.$$

Ответ: 10.

Задача 8. Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Площадь боковой поверхности отсеченной треугольной призмы равна 8. Найдите площадь боковой поверхности исходной призмы.

Решение. Площадь боковой поверхности призмы равна произведению периметра основания на высоту боковой грани. Высота боковой грани у исходной призмы и отсеченной призм совпадает.



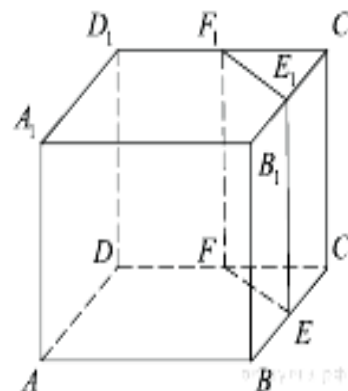
Поэтому площади боковых граней относятся как периметры оснований. Треугольники в основании исходной и отсеченной призм подобны, все их стороны относятся как 1:2. Поэтому периметр основания отсеченной призмы вдвое меньше исходного. Следовательно, площадь боковой поверхности исходной призмы равна 16.

Ответ: 16.

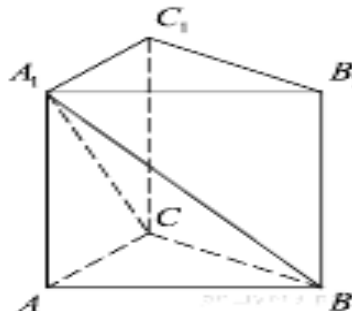
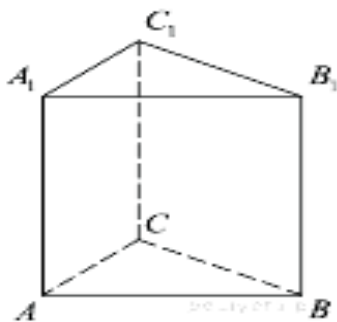
Задача 9. Объем куба равен 12. Найдите объем треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух ребер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины.

Решение. Поскольку высота куба равна высоте призмы, их объемы пропорциональны площадям их оснований. Площадь основания построенной призмы в 8 раз меньше площади основания исходной, поэтому искомый объем призмы равен $12:8 = 1,5$.

Ответ: 1,5.



Задача 10. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, A_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 2, а боковое ребро равно 3.

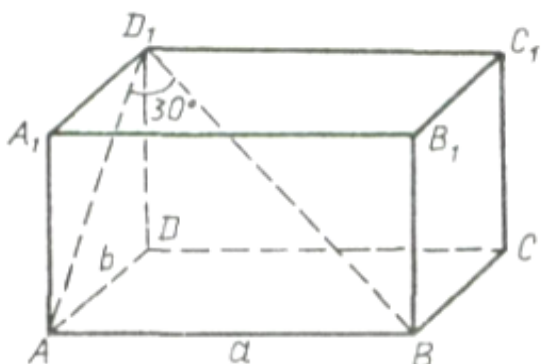


Решение. Требуется найти объем пирамиды, основание и высота которой совпадают с основанием и высотой данной треугольной призмы. Поэтому

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{пир}} h_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{пр}} h_{\text{пр}} = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 3 = 2$$

Ответ: 2.

Задача 11. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны a и b . Диагональ параллелепипеда составляет с боковой гранью, содержащей сторону основания, равную b , угол в 30° . Найдите объем параллелепипеда.



Решение.

В прямоугольном треугольнике ABC_1 :

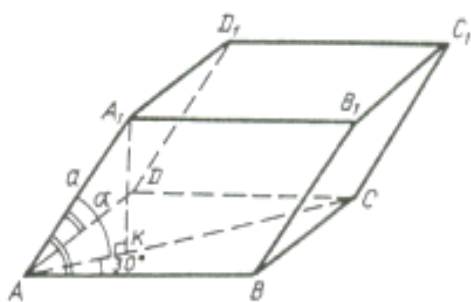
$$BD_1 = 2a, AD_1 = 2a \cdot \cos 30^\circ = a\sqrt{3}$$

В прямоугольном треугольнике

$$ADD_1: DD_1 = \sqrt{AD_1^2 - AD^2},$$

$$DD_1 = \sqrt{3a^2 - b^2}, V = AB \cdot AD \cdot AD_1, V = ab\sqrt{3a^2 - b^2}.$$

Задача 12. Все грани параллелепипеда – равные ромбы со стороной a и острым углом 60° . Найдите объем параллелепипеда.



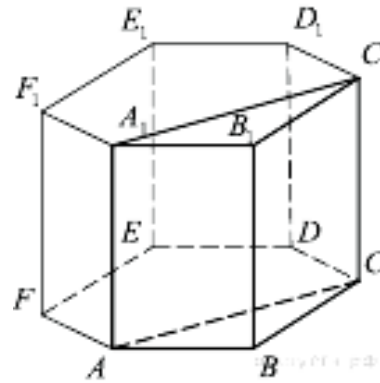
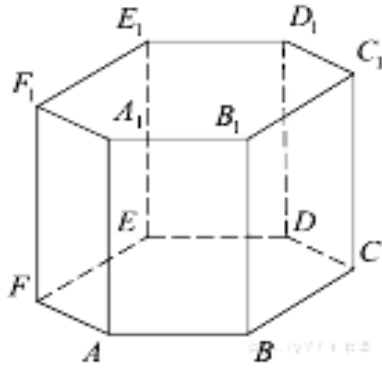
Решение. Проекцией ребра AA_1 является отрезок AK . Пусть $\angle A_1AK = \alpha$, тогда

$$\cos 60^\circ = \cos \alpha \cdot \cos 30^\circ,$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{Из } \triangle AA_1K: A_1 = \sin \alpha = \frac{a\sqrt{6}}{3}, V = a^2 \sin 60^\circ \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{2}.$$

Задание 13. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, A_1, B_1, C_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ площадь основания которой равна 6, а боковое ребро равно 3.



Решение. Многогранник, объем которого требуется найти, является прямой треугольной призмой. Объем призмы равен произведению площади основания на высоту. Основанием призмы является треугольник. Площадь правильного шестиугольника в основании равна $S = 6 \cdot \frac{R^2 \sqrt{3}}{4}$, площадь треугольника ABC

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} R \cdot R \cdot \sin 120^\circ = \frac{R^2 \sqrt{3}}{4}$, следовательно, площадь треугольника ABC равна одной шестой площади основания шестиугольной призмы. Высотой прямой призмы является боковое ребро, его длина равна 3. Таким образом, искомый объем $V = 3$.

Ответ: 3.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задание 1. Диагональ куба равна $\sqrt{12}$. Найдите его объем.

Задание 2. Во сколько раз увеличится объем куба, если его ребра увеличить в три раза?

Задание 3. Объем куба равен $24\sqrt{3}$. Найдите его диагональ.

Задание 4. Объем одного куба в 8 раз больше объема другого куба. Во сколько раз площадь поверхности первого куба больше площади поверхности второго куба?

Задание 5. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка K – середина ребра $A A_1$, точка L – середина ребра AD_1 , точка M – середина ребра $D_1 B_1$. Найдите угол MLK . Ответ дайте в градусах.

Задание 6. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 2300 см^3 воды и погрузили в воду деталь. При этом уровень воды поднялся с отметки 25 см до отметки 27 см. Найдите объем детали. Ответ выразите в см^3 .

Задание 7. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду. Уровень воды достигает 80 см. На какой высоте будет находиться уровень воды, если ее перелить в другой такой же сосуд, у которого сторона основания в 4 раза больше, чем у первого? Ответ выразите в см.

Задание 8. Найдите объем прямой призмы $ABCA_1 B_1 C_1$, если $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = BB_1 = a$, $AC = CB$.

Задание 9. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, A_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$, площадь основания которой равна 3, а боковое ребро равно 2.

Задание 10. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки $A, B, D, E, A_1, B_1, D_1, E$ правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ площадь основания которой равна 6, а боковое ребро равно 2.

Задание 11. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 2,5 см, 5 см и 5 см. Найдите ребро куба, объем которого в два раза больше объема данного параллелепипеда.

Задание 12. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 2 см, 6 см и 6 см. Найдите ребро куба, объем которого в три раза больше объема данного параллелепипеда.

Задание 13. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все ребра равны 1. Найдите расстояние между точками B и E .

Задание 14. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите угол между прямыми AD_1 и $B_1 D_1$. Ответ дайте в градусах.

Задание 15. Найдите объем прямой призмы $ABCA_1 B_1 C_1$, если $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$, $AB = a$, $CB = BB_1$.

Задание 16. Сумма площадей трех граней прямоугольного параллелепипеда, имеющих общую вершину, равна 404 дм, а его ребра пропорциональны числам 3, 7 и 8. Найдите диагональ параллелепипеда.

Задание 17. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 12 см и 5 см. Диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол в 45° . Найдите боковое ребро параллелепипеда.

Задание 18. Основанием прямого параллелепипеда является ромб с диагоналями 10 см и 24 см, а высота параллелепипеда равна 10 см. Найдите большую диагональ параллелепипеда.

Задание 19. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 8 см, боковое ребро равно 6 см. Найдите площадь сечения, проходящего через сторону верхнего основания и противоположащую вершину нижнего основания.

Задание 20. Основанием прямой призмы является равнобедренная трапеция с основаниями 25 см и 9 см и высотой 8 см. Найдите двугранные углы при боковых ребрах призмы.

Задание 21. Через два противоположащих ребра куба проведено сечение, площадь которого равна $64\sqrt{2}$ см². Найдите ребро куба и его диагональ.

Задание 22. Диагональ правильной четырехугольной призмы наклонена к плоскости основания под углом 60° . Найдите площадь сечения, проходящего через сторону нижнего основания и противоположащую сторону верхнего основания, если диагональ основания равна $4\sqrt{2}$ см.

Задание 23. Диагональ правильной четырехугольной призмы образует с плоскостью боковой грани угол в 30° . Найдите угол между диагональю и плоскостью основания.

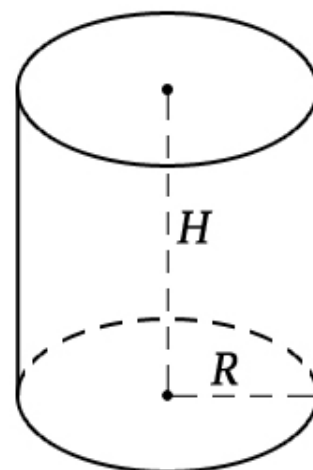
Задание 24. Боковое ребро наклонной четырехугольной призмы равно 12 см, а перпендикулярным сечением является ромб со стороной 5 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

2. Тела вращения. Объёмы и площади поверхности.

2.1. Цилиндр

Цилиндром называется тело, которое состоит из двух кругов, не лежащих в одной плоскости и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих кругов.

Круги называются *основаниями цилиндра*, а отрезки, соединяющими цилиндра. Так как параллельный перенос есть движение, то основания цилиндра равны.



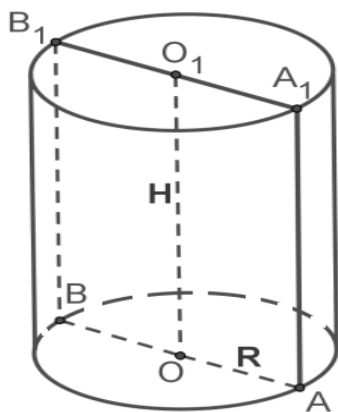
Так как при параллельном переносе плоскость переходит в параллельную плоскость (или в себя), то у цилиндра основания лежат в параллельных плоскостях. Так как при параллельном переносе точки смещаются по параллельным (или совпадающим) прямым на одно и то же расстояние, то у цилиндра образующие параллельны и равны.

Поверхность цилиндра состоит из оснований и боковой поверхности.

Боковая поверхность составлена из образующих. Цилиндр называется прямым, если его образующие перпендикулярны плоскостям основания.

Радиусом цилиндра называется радиус его основания. Высотой цилиндра называется расстояние между плоскостями его оснований. Осью цилиндра называется прямая, проходящая через центры оснований. Она параллельна образующим.

Цилиндр - это тело вращения, которое получается при вращении прямоугольника вокруг его стороны.



Прямоугольник AOO_1A_1 вращается вокруг стороны OO_1 . OO_1 -ось симметрии цилиндра и высота цилиндра.

AA_1 - образующая цилиндра, длина которой равна длине высоты цилиндра.

AO - радиус цилиндра.

Полученная цилиндрическая поверхность называется боковой поверхностью цилиндра, а круги основаниями цилиндра.

Осевое сечение цилиндра — это сечение цилиндра плоскостью, которая проходит через ось цилиндра. Это сечение является прямоугольником.

При сечении цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра (т.е. перпендикулярной основанию), также получается прямоугольник.

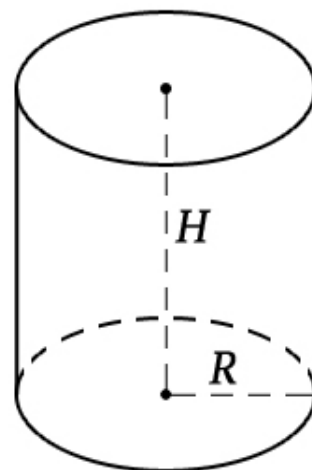
Пусть H - высота цилиндра, R - радиус цилиндра. Тогда площадь боковой поверхности цилиндра вычисляется по формуле:

$$S_{бок} = 2\pi RH .$$

Площадь полной поверхности цилиндра:

$$S_{полн} = 2\pi R(R + H) .$$

Объем цилиндра: $V_{ц} = \pi R^2 H$.



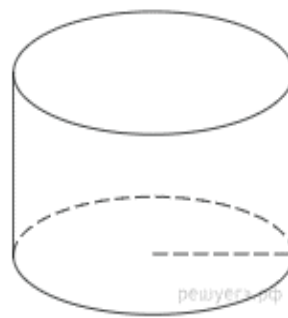
Примеры решения задач

Задача 1. Радиус основания цилиндра равен 2, высота равна 3. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, деленную на π .

Решение.

Площадь боковой поверхности цилиндра
 $S = 2\pi RH$, поэтому $S = 2\pi \cdot 2 \cdot 3 = 12\pi$.

Ответ: 12.

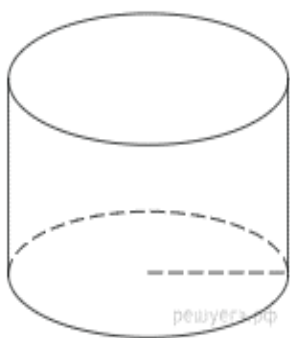


Задача 2. Длина окружности основания цилиндра равна 3, высота равна 2. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

Решение.

Площадь боковой поверхности цилиндра равна $S = 2\pi RH = CH$, где C – длина окружности основания. Поэтому $S = 3 \cdot 2 = 6$

Ответ: 6.



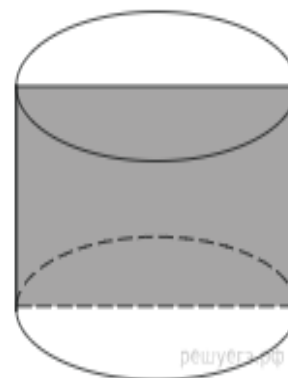
Задача 3. Площадь осевого сечения цилиндра равна 4. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, деленную на π .

Решение.

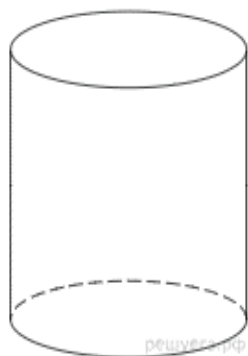
Площадь осевого сечения цилиндра равна $S = 2RH$, так как это прямоугольник. Тогда для площади боковой поверхности имеем:

$$S_{бок} = 2\pi RH = S_{сеч} \cdot \pi = 4\pi$$

Ответ: 4.



Задача 4. Длина окружности основания цилиндра равна 3. Площадь боковой поверхности равна 6. Найдите высоту цилиндра.



Решение.

Площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению длины окружности, лежащей в основании, на высоту. Поэтому высота цилиндра равна 2.

Ответ: 2.

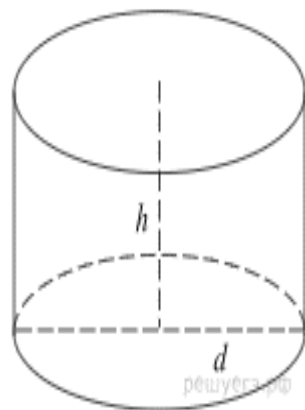
Задача 5. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 2π , а диаметр основания - 1. Найдите высоту цилиндра.

Решение.

Площадь боковой поверхности цилиндра находится по формуле: $S_{бок} = 2\pi RH$, значит,

$$H = \frac{S_{бок}}{2\pi R} = \frac{2\pi}{2\pi \cdot \frac{d}{2}} = 2$$

Ответ: 2.



ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 1. Радиус основания цилиндра равен 7, высота равна 10. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, деленную на π .

Задача 2. В цилиндрический сосуд налили 6 куб. см воды. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде увеличился в 1,5 раза. Найдите объем детали. Ответ выразите в куб. см.

Задача 3. Одна цилиндрическая кружка вдвое выше второй, зато вторая в полтора раза шире. Найдите отношение объема второй кружки к объему первой.

Задача 4. Площадь осевого сечения цилиндра равна 28. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, деленную на π .

Задача 5. Длина окружности основания цилиндра равна 15. Площадь боковой поверхности равна 90. Найдите высоту цилиндра.

Задача 6. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 18π , а диаметр основания равен 9. Найдите высоту цилиндра.

Задача 7. Объем первого цилиндра равен 12 м^3 . У второго цилиндра высота в три раза больше, а радиус основания - в два раза меньше, чем у первого. Найдите объем второго цилиндра. Ответ дайте в кубических метрах.

Задача 8. Одна цилиндрическая кружка вдвое выше второй, зато вторая в полтора раза шире. Найдите отношение объема второй кружки к объему первой.

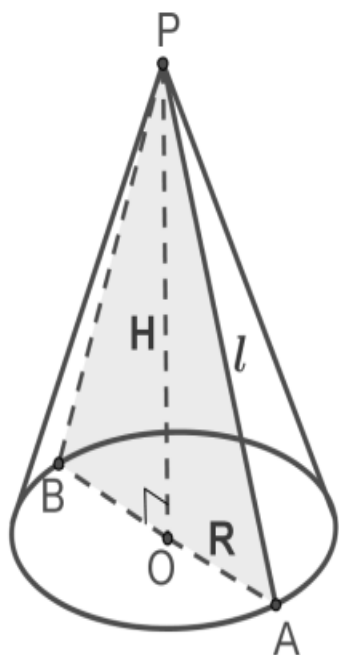
2.2. Конус

Конусом называется тело, которое состоит из круга - основания конуса, точки, не лежащей в плоскости этого круга, - вершины конуса и всех отрезков, соединяющих вершину конуса с точками основания.

Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания, называются *образующими конуса*. Поверхность конуса состоит из основания и боковой поверхности. Конус называется прямым, если прямая, соединяющая вершину конуса с центром основания.

Высотой конуса называется перпендикуляр, опущенный из его вершины на плоскость основания. У прямого конуса основание высоты совпадает с центром основания. Осью прямого кругового конуса называется прямая, содержащая его высоту.

Конус - тело вращения, которое получается в результате вращения прямоугольного треугольника вокруг его катета.



Треугольник POA вращается вокруг стороны PO.

PO – ось конуса и высота конуса.

P - вершина конуса.

PA – образующая конуса.

Круг с центром O – основание конуса.

AO – радиус основания конуса.

Осевое сечение конуса – это сечение конуса плоскостью, которая проходит через ось PO конуса.

Осевое сечение конуса – это равнобедренный треугольник.

APB — осевое сечение конуса.

$\angle PAO = \angle PBO$ - углы между образующими и основанием конуса.

Пусть H - высота конуса, R - радиус конуса, l - образующая конуса.

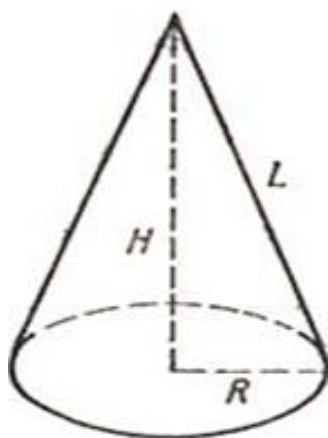
Тогда площадь боковой поверхности конуса вычисляется по формуле:

$$S_{бок} = \pi R l .$$

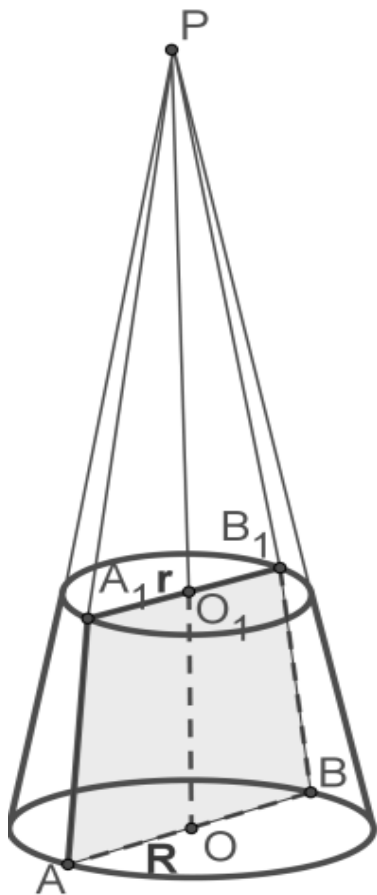
Площадь полной поверхности конуса:

$$S = \pi R^2 + l \pi R \quad \text{или} \quad S = \pi R(l + R) .$$

Объем конуса: $V_k = \frac{1}{3} \pi R^2 H .$



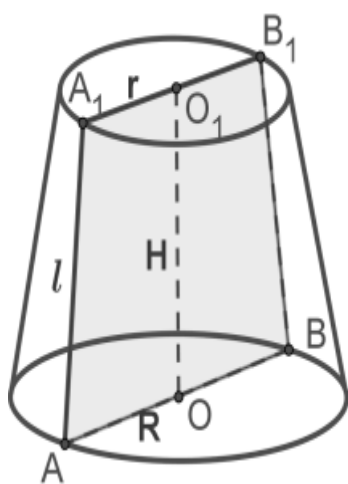
2.3. Усеченный конус



Если провести сечение конуса плоскостью, перпендикулярной оси конуса, то эта плоскость разбивает конус на две части, одна из которых- конус, а другую часть называют усечённым конусом. Также усечённый конус можно рассматривать как тело вращения, которое образовалось в результате вращения прямоугольной трапеции вокруг боковой стороны (которая перпендикулярна к основанию трапеции) или в результате вращения равнобедренной трапеции вокруг высоты, проведённой через серединные точки оснований трапеции.

OO_1 - ось конуса и высота конуса.

AA_1 - образующая конуса.



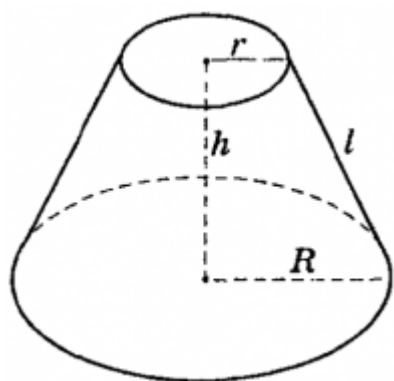
Круги с центрами O и O_1 – основания усечённого конуса. AO и A_1O_1 – радиусы оснований конуса.

Осевое сечение конуса – это сечение конуса плоскостью, которая проходит через ось OO_1 конуса.

Осевое сечение конуса – это равнобедренная трапеция.

AA_1B_1B - осевое сечение конуса.

Пусть h - высота усеченного конуса, r и R - радиусы основания усеченного конуса, l - образующая усеченного конуса.



Тогда площадь боковой поверхности усеченного конуса вычисляется по формуле:

$$S_{бок} = \pi(r + R) \cdot l.$$

Объем усеченного конуса:

$$V_{\kappa} = \frac{1}{3} \pi h (r^2 + rR + R^2).$$

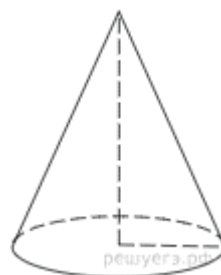
Примеры решения задач

Задача 1. Высота конуса равна 6, образующая равна 10. Найдите его объем, деленный на π .

Решение.

По теореме Пифагора найдем, что радиус основания равен $r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.

Тогда объем конуса, деленный на π :



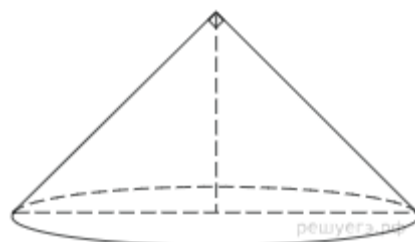
$$\frac{V}{\pi} = \frac{1}{3} \frac{Sh}{\pi} = \frac{1}{3} \frac{\pi \cdot r^2 h}{\pi} = \frac{1}{3} \cdot 8^2 \cdot 6 = 128.$$

Ответ: 128.

Задача 2. Диаметр основания конуса равен 6, а угол при вершине осевого сечения равен 90° . Вычислите объем конуса, деленный на π .

Решение.

В треугольнике, образованном радиусом основания r , высотой h и образующей конуса l , углы при образующей равны,



поэтому высота конуса равна радиусу его

основания: $h = r$. Тогда объем конуса,

деленный на π вычисляется следующим образом:

$$\frac{V}{\pi} = \frac{1}{3} \frac{Sh}{\pi} = \frac{1}{3} \frac{\pi \cdot r^2 h}{\pi} = \frac{1}{3} r^2 r = \frac{1}{3} 3^3 = 9.$$

Ответ: 9.

Задача 3. Радиус основания конуса равен 3, высота равна 4. Найдите площадь полной поверхности конуса, деленную на π .

Решение.

Найдем образующую по теореме Пифагора:

$$l = \sqrt{r^2 + h^2} = 5. \text{ Площадь полной поверхности конуса}$$

$$S = \pi r^2 + l\pi r = \pi r(l + r) = \pi \cdot 3 \cdot 8 = 24\pi.$$

Ответ: 24.

Задача 4. Длина окружности основания конуса равна 3, образующая равна 2. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

Решение.

Площадь боковой поверхности конуса равна $S = \pi Rl = \frac{1}{2} Cl$,

где C - длина окружности основания, а l - образующая. Тогда

$$S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3.$$

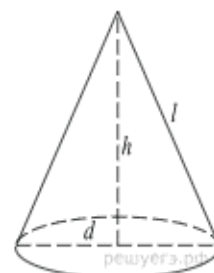
Ответ: 3.

Задача 5. Высота конуса равна 4, а диаметр основания - 6. Найдите образующую конуса.

Решение.

Рассмотрим осевое сечение конуса. По теореме Пифагора

$$l = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2} = \sqrt{\frac{36}{4} + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

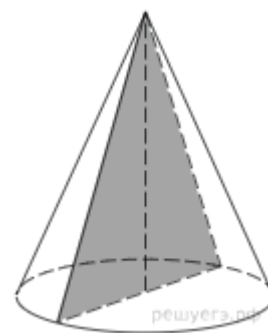


Ответ: 5.

Задача 6. Площадь основания конуса равна 16π , высота - 6. Найдите площадь осевого сечения конуса.

Решение.

Осевым сечением конуса является равнобедренный треугольник, высота которого совпадает с высотой конуса, а основание является диаметром основания конуса. Поэтому площадь осевого сечения равна половине произведения высоты конуса на диаметр его основания или произведению высоты конуса на радиус основания R .



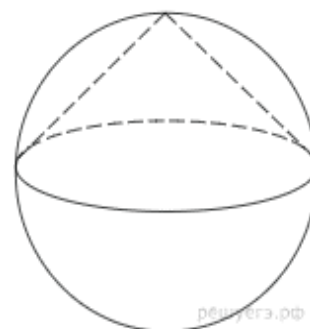
Поскольку по условию $\pi R^2 = 16\pi$, радиус основания конуса равен 4, а тогда искомая площадь осевого сечения равна 24.

Ответ: 24.

Задача 7. Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы совпадает с центром основания конуса. Радиус сферы равен $10\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.

Решение.

Высота конуса перпендикулярна основанию и равна радиусу сферы. Тогда по теореме Пифагора получаем: $l^2 = r^2 + r^2 \Leftrightarrow l = r\sqrt{2}$.



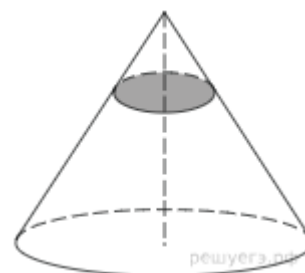
Радиус сферы равен $10\sqrt{2}$, поэтому образующая равна $10\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 20$

Ответ: 20.

Задача 8. Площадь основания конуса равна 45. Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, делит его высоту на отрезки длиной 4 и 8, считая от вершины. Найдите площадь сечения конуса этой плоскостью.

Решение.

Исходный и отсеченный конус подобны с коэффициентом подобия 3. Площади поверхностей подобных тел относятся как квадрат коэффициента подобия.



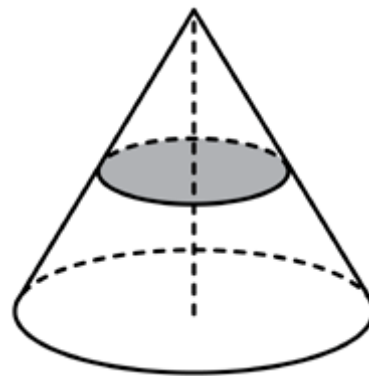
Поэтому площадь основания отсечённого конуса в 9 раз меньше площади основания исходного. Тем самым, она равна 5.

Ответ: 5.

Задача 9. Объем конуса равен 16. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса.

Решение.

Меньший конус подобен большему с коэффициентом 0,5. Объемы подобных тел относятся как куб коэффициента подобия. Поэтому объем меньшего конуса в восемь раз меньше объема большего конуса.



Ответ: 2.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 1. Высота конуса равна 12, образующая равна 14. Найдите его объем, деленный на π .

Задача 2. Диаметр основания конуса равен 12, а угол при вершине осевого сечения равен 90° . Вычислите объем конуса, деленный на π .

Задача 3. Длина окружности основания конуса равна 5, образующая равна 8. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

Задача 4. Радиус основания конуса равен 24, высота равна 7. Найдите площадь полной поверхности конуса, деленную на π .

Задача 5. Высота конуса равна 21, а диаметр основания - 144. Найдите образующую конуса.

Задача 6. Высота конуса равна 4, а длина образующей — 5. Найдите диаметр основания конуса.

Задача 7. Площадь основания конуса равна 25π , высота - 4. Найдите площадь осевого сечения конуса.

Задача 8. Найдите площадь осевого сечения конуса, радиус основания которого равен 3, а образующая равна 5.

Задача 9. В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{2}$ высоты. Объем жидкости равен 40 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы наполнить сосуд доверху?

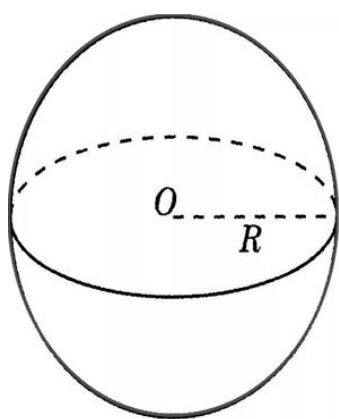
Задача 10. Объем конуса равен 120. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса.

2.4. Шар

Сферическая поверхность – это геометрическое место точек (т.е. множество всех точек) в пространстве, равноудалённых от одной данной точки, которая называется центром сферической поверхности.

Можно получить шар, вращая полукруг (или круг) вокруг диаметра. Все плоские сечения шара - круги. Наибольший круг лежит в сечении, проходящем через центр шара, и называется большим кругом. Его радиус равен радиусу шара.

Любые два больших круга пересекаются по диаметру шара. Этот диаметр является и диаметром пересекающихся больших кругов.

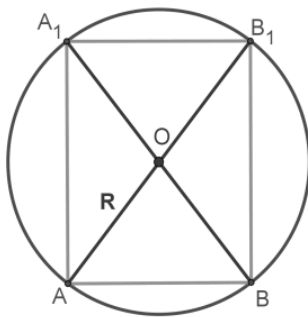
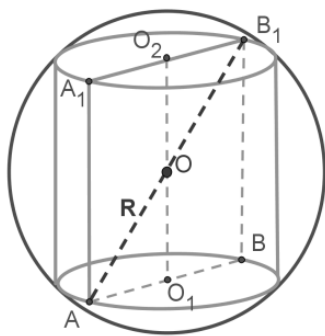


Пусть R - радиус шара, D - его диаметр.

Площадь поверхности шара вычисляется по формуле: $S_{\text{поверхн}} = 4\pi R^2$.

Объем шара радиуса вычисляется по формуле: $V_{\text{шар}} = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Шар и цилиндр. Шар является описанным около цилиндра, если окружности оснований цилиндра лежат на поверхности шара.

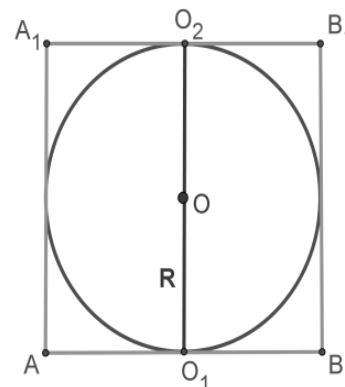
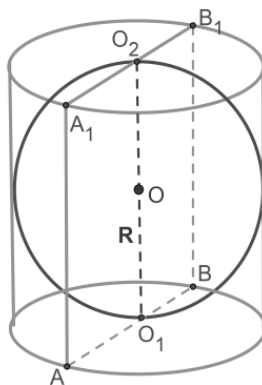


Центр шара O находится в середине высоты цилиндра. Общие элементы — две окружности. Около любого цилиндра можно описать шар.

Радиус шара — половина диагонали осевого сечения цилиндра.

Шар является *вписанным в цилиндр*, если касается оснований цилиндра и всех его образующих.

Центр шара O — середина высоты цилиндра.

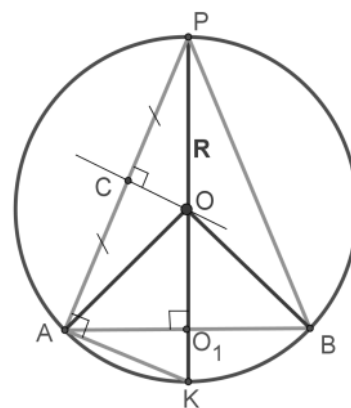
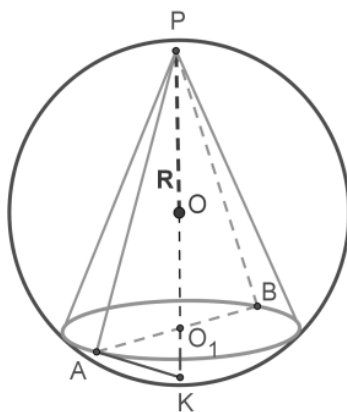


Шар и конус. *Шар* является *описанным около конуса*, если вершина конуса и окружность его основания находятся на поверхности шара.

Около любого конуса можно описать шар.

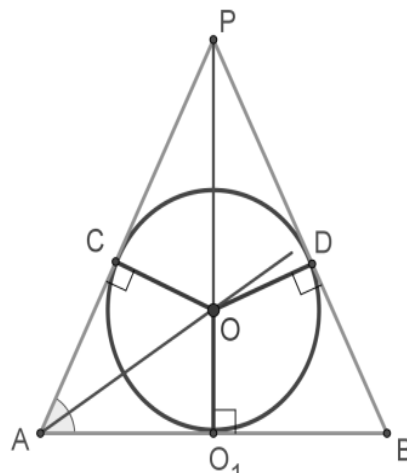
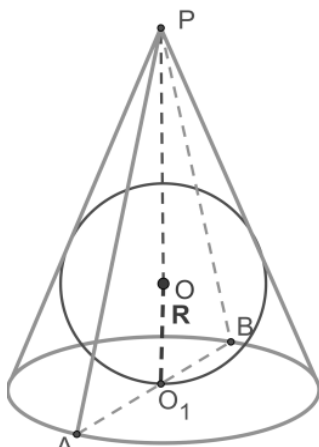
Чертится осевое сечение.

В общем случае осевым сечением является равнобедренный треугольник. Центр шара O находится в точке пересечения высоты конуса и серединного перпендикуляра образующей конуса.



Шар является вписанным в конус, если касается основания конуса и всех его образующих.

В любой конус можно вписать шар. Чертится осевое сечение.



В общем случае осевым сечением является равнобедренный треугольник. Центр шара O находится в точке пересечения высоты конуса и биссектрисы угла образующей конуса с основанием конуса.

Примеры решения задач

Задача 1. Объем шара равен 288π . Найдите площадь его поверхности, деленную на π .

Решение.

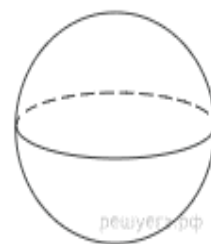
Объем шара радиуса R вычисляется по

формуле $V_{\text{шар}} = \frac{4}{3}\pi R^3$, откуда

$$R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 288\pi}{4\pi}} = 6.$$

Площадь его поверхности: $S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 6^2 = 144\pi$.

Ответ: 144.



Задача 2. Площадь поверхности шара равна 24. Найдите площадь большого круга шара.

Решение.

Площадь большого круга равна $S_{\text{круга}} = \pi R^2$, а площадь поверхности шара равна $S_{\text{поверхн}} = 4\pi R^2$, где R - радиус шара. Следовательно, искомая площадь равна 6.

Ответ: 6.

Задача 3. Площадь большого круга шара равна 3. Найдите площадь поверхности шара.

Решение.

Площадь большого круга равна $S_{\text{круга}} = \pi R^2$, а площадь поверхности шара равна $S_{\text{поверхн}} = 4\pi R^2$, R - радиус шара. Следовательно, искомая площадь равна 12.

Ответ: 12.

Задача 4. Цилиндр описан около шара. Объем цилиндра равен 33. Найдите объем шара.

Решение.

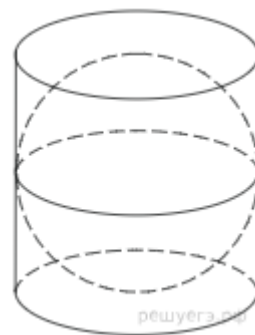
$$V_{\text{цил}} = S_{\text{осн}} h = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3 = 33,$$

$$V_{\text{шар}} = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Выразим из формулы для объёма цилиндра R^3 и подставим в формулу для объёма шара

$$V_{\text{шар}} = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot \frac{33}{2\pi} = 22.$$

Ответ: 22.



Задача 5. Шар, объём которого равен 60, вписан в цилиндр. Найдите объём цилиндра.

Решение.

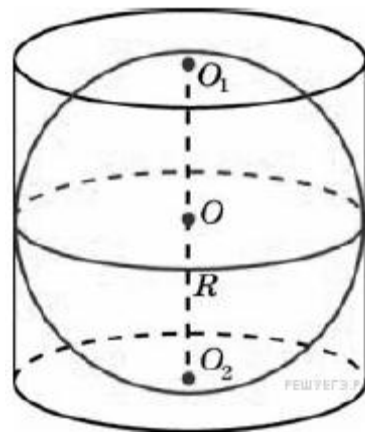
Высота цилиндра равна двум радиусам вписанного в цилиндр шара, поэтому объём цилиндра, выраженный через радиус вписанного в него шара, даётся формулой $V_{ц} = \pi \cdot R^2 \cdot 2R = 2\pi \cdot R^3$. Объём шара

вычисляется по формуле $V_{шар} = \frac{4}{3}\pi R^3$, откуда имеем:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 60 \Leftrightarrow R^3 = \frac{45}{\pi} \Leftrightarrow 2\pi R^3 = 90.$$

Тем самым, объём цилиндра равен 90.

Ответ: 90.



Задача 6. Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объём шара равен 28. Найдите объём конуса.

Решение.

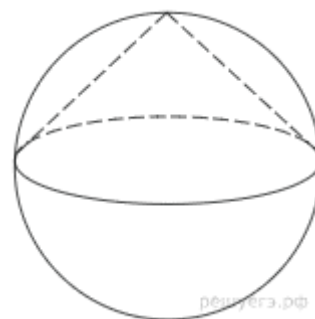
Запишем формулу для объёма шара: $V_{шар} = \frac{4}{3}\pi R^3$

Объём конуса в 4 раза меньше:

$$V_{конус} = \frac{1}{3}S_{осн} \cdot h = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R = \frac{1}{3}\pi R^3 = \frac{1}{4} \cdot V_{шар} = \frac{28}{4} = 7$$

.

Ответ: 7.



Задача 7. Цилиндр описан около шара. Объем шара равен 24. Найдите объем цилиндра.

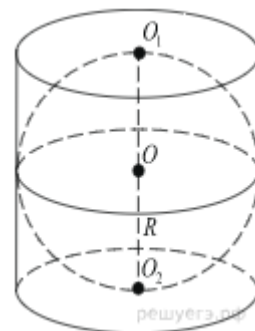
Решение.

Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту. Площадь основания цилиндра равна площади большого круга вписанного шара, а высота цилиндра равна диаметру вписанного шара.

Поэтому

$$V_{\text{цил}} = S_{\text{осн}} h = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3 = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{3}{2} V_{\text{шар}} = \frac{3}{2} \cdot 24 = 36.$$

Ответ: 36.



Задача 8. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Объём конуса равен 25. Найдите объём цилиндра.

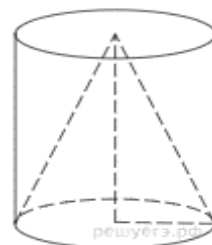
Решение.

Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту, а объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.

Поскольку

они имеют общее основание и высоту, объем цилиндра в три раза больше объема конуса.

Ответ: 75.



ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 1. Площадь большого круга шара равна 7. Найдите площадь поверхности шара.

Задача 2. Во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить в три раза?

Задача 3. Объем одного шара в 27 раз больше объема второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?

Задача 4. Объем шара равен 972π . Найдите площадь его поверхности, деленную на π .

Задача 5. Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объем шара равен 128. Найдите объем конуса.

Задача 6. Цилиндр описан около шара. Объем цилиндра равен 105. Найдите объем шара.

Задача 7. Цилиндр описан около шара. Объем шара равен 88. Найдите объем цилиндра.

Задача 8. Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объем конуса равен 6. Найдите объем шара.

Задача 9. Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объем шара равен 156. Найдите объем конуса.

Задача 10. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Объем конуса равен 42. Найдите объем цилиндра.

Задача 11. Конус и цилиндр имеют общее основание и общую высоту (конус вписан в цилиндр). Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 5.

Задача 12. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Найдите объем конуса, если объем цилиндра равен 150.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Автономова Т.В.** Основные понятия и методы школьного курса геометрии: Книга для учителя. / Т.В. Автономова, Б.И. Аргунов. – М.: Просвещение, 1988.
2. **Александров А.Д.** Что такое многогранник? / А.Д. Александров// Математика в школе. – 1981. – № 1-2.
3. **Атанасян Л.С.** Геометрия: Учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений. / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – М.: Просвещение, 1998. – 207 с.
4. **Болтянский В.Г.** Выпуклые многоугольники и многогранники. / В.Г. Болтянский, И.М. Яглом // Математика в школе. – 1966. – № 3.
5. Методика преподавания геометрии в старших классах средней школы. / Под. ред. А.И. Фетисова. – М.: Просвещение, 1967.
6. Методика преподавания математики: Общая методика. / Составители: Р.С. Черкасов, А.А. Столяр. – М.: Просвещение, 1985.
7. **Смирнова И.М.** Об определении понятия правильного многогранника. / И.М. Смирнова. // Математика в школе. – 1995. – № 3.
8. **Смирнова И.М.** Уроки стереометрии в гуманитарных классах. Изучение многогранников. / И.М. Смирнова. // Математика в школе. – 1994. – № 4.
9. **Саакян С.М.** Изучение темы «Многогранники» в курсе 10 класса. / С.М. Саакян, В.Ф. Бутузов. // Математика в школе. – 2000. – № 2.