

**ГАОУ ВО
«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА»**

**Бабичева Т.А.
Кафедра математики**

**УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«МАТЕМАТИКА»**

РЕШЕНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Махачкала – 2018 г.

УДК 51
ББК 22.10

Бабичева Т.А. Учебное пособие «Решение логарифмических уравнений» (практикум) – Махачкала: ДГУНХ, 2018. – 32 с.

Составитель: Бабичева Татьяна Анатольевна – старший преподаватель кафедры математики Дагестанского государственного университета народного хозяйства.

Внутренний рецензент: Гереева Тату Рашидовна, к.э.н., доцент кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» ДГУНХ

Внешний рецензент: Магомедова Вазипат Гусейновна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа ДГУ.

Учебное пособие «Решение логарифмических уравнений» (практикум) размещено на официальном сайте www.dgunh.ru

Цель данного пособия – помочь студентам лучше освоить понятия курса, научить решать задачи по этому разделу математики. Для закрепления теоретических знаний, приобретения навыков в решении задач и с целью самопроверки.

© ГАОУ ВО «ДГУНХ», 2018.

© Бабичева Т.А., 2018.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Логарифмические тождества	4
1.1. Логарифмы и их свойства	4
1.2. Свойства логарифмов.....	5
2. Логарифмическая функция, её свойства и график.....	6
3. Логарифмические уравнения.....	7
3.1. Простейшие логарифмические уравнения.....	7
3.2. Простейшие логарифмические уравнения, содержащие показательную функцию. Логарифмо-показательные уравнения.....	9
3.3. Логарифмические уравнения, содержащие суммы и разности логарифмов, умножение логарифма на число	17
3.4. Логарифмические уравнения, решаемые методом введения новой переменной.....	24
3.5. Показательно-логарифмические уравнения	30
Литература	32

1. Логарифмические тождества

1.1. Логарифмы и их свойства

Определение 1. Логарифмом положительного числа ***b*** по положительному и не равному единице основанию ***a*** называется показатель степени, в которую нужно возвести основание ***a***, чтобы получить число ***b***:

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b \quad (a > 0; a \neq 1; b > 0).$$

Основное логарифмическое тождество

$$x = a^{\log_a x}.$$

Примеры.

$$1) \log_2 x = 5 \Leftrightarrow x = 2^5 \Leftrightarrow x = 32;$$

$$2) \log_{25} x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 25^{1/2} \Leftrightarrow x = \sqrt{25} \Leftrightarrow x = 5.$$

Определение 2. Десятичным логарифмом называется логарифм по основанию десять:

$$\lg b = \log_{10} b.$$

Примеры:

$$1) \lg 10 = 1;$$

$$2) \lg 100 = 2, \text{ так как } 10^2 = 100;$$

$$3) \lg x = 3 \Leftrightarrow x = 10^3 \Leftrightarrow x = 1000.$$

Определение 3. Натуральным логарифмом называется логарифм по основанию натуральных логарифмов:

$$\ln b = \log_e b$$

Замечательное число e для математического анализа имеет такое же значение, как число π для геометрии. Основание натуральных логарифмов — число иррациональное и равно $e = 2,71...$

Примеры:

1) $\ln e = 1$;

2) $\ln e^2 = 2$.

Определение 4. Логарифм по любому допустимому основанию от этого же числа равен единице:

$$\log_a a = 1 \quad (a > 0; a \neq 1) \text{ или } 1 = \log_a a \quad (a > 0; a \neq 1).$$

1.2. Свойства логарифмов

При любом $a > 0$ ($a \neq 0$) и любых положительных x и y выполняются следующие свойства:

1. Логарифм единицы по основанию a равен нулю:

$$\log_a 1 = 0.$$

2. Логарифм a по основанию a равен 1:

$$\log_a a = 1$$

3. Логарифм произведения равен сумме логарифмов:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \text{ или } \log_a x + \log_a y = \log_a(xy).$$

4. Логарифм частного равен разности логарифмов:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \text{ или } \log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}.$$

5. Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм основания этой степени:

$$\log_a x^p = p \cdot \log_a x \text{ или } p \cdot \log_a x = \log_a x^p.$$

для любого действительного числа p .

6. Формула перехода от одного основания логарифма к другому основанию:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \text{ или } \frac{\log_b x}{\log_b a} = \log_a x \quad (x > 0, a > 0 \text{ и } a \neq 1, b > 0 \text{ и } b \neq 1).$$

Следствие из формулы перехода:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \text{ или } \frac{1}{\log_b a} = \log_a b.$$

Первое свойства логарифмов следуют из определения логарифма и свойства степени с показателем 0 и 1: $a^0 = 1$, значит, $\log_a 1 = 0$; $a^1 = a$, значит, $\log_a a = 1$.

2. Логарифмическая функция, её свойства и график

Определение. *Логарифмической функцией называется функция вида*

$$y = \log_a x, \text{ где } a - \text{ заданное число, } a > 0, a \neq 1.$$

Свойства логарифмической функции

1. Областью определения логарифмической функции являются все положительные действительные числа: $D(y) = (0; \infty)$.

Это следует из определения логарифма числа ***b*** по основанию ***a***:

$$\log_a b \text{ имеет смысл, если } b > 0.$$

2. Множеством значений логарифмической функции являются все действительные числа: $E(y) = (-\infty; \infty)$.

3. Логарифмическая функция обращается в нуль при $x = 1$.

Решим уравнение $\log_a x = 0$. По определению логарифма получаем:

$$a^0 = x, \text{ т. е. } x = 1.$$

4. Логарифмическая функция $y = \log_a x$ возрастает на всей области определения, если $a > 1$.

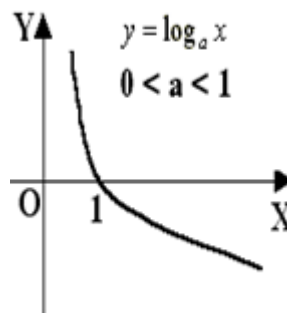
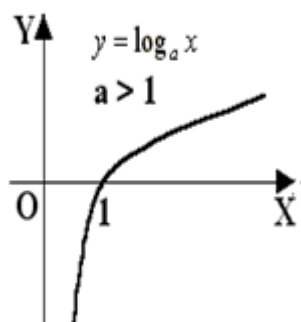
Логарифмическая функция $y = \log_a x$ убывает на всей области определения, если $0 < a < 1$.

5. Логарифмическая функция $y = \log_a x$:

а) при $a > 1$ принимает положительные значения, если $x > 1$; отрицательные значения, если $0 < x < 1$.

б) при $0 < a < 1$ принимает положительные значения, если $0 < x < 1$, и отрицательные значения, если $x > 1$.

6. Логарифмическая функция непрерывна на всей области определения.



3. Логарифмические уравнения

3.1. Простейшие логарифмические уравнения

Определение 1. *Логарифмическим уравнением* называется уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма и (или) в основании логарифма.

Например, $\log_5 x = \log_{25} x + \lg 100$.

Определение 2. Простейшим логарифмическим уравнением называется уравнение вида

$$\log_a f(x) = b$$

Например, $\log_2 x = 5$.

Простейшее логарифмическое уравнение решается потенцированием:

$$\begin{cases} \log_a f(x) = b, \\ f(x) > 0, \\ a > 0, a \neq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a^b, \\ f(x) > 0, \\ a > 0, a \neq 1. \end{cases}$$

Пример 1. Решить уравнение $\log_2 x = 5$.

Решение. $\log_2 x = 5 \Leftrightarrow x = 2^5$.

Ответ: $x = 32$.

Определение 2. Простейшим логарифмическим уравнением с одинаковыми основаниями логарифмов называется уравнение вида:

$$\log_a f(x) = \log_a F(x),$$

где a - заданное число.

Замечание. Уравнение вида $\log_a f(x) = \log_a F(x)$ не является простейшим логарифмическим уравнением. Однако его можно привести к простейшему логарифмическому уравнению:

$$\log_a f(x) = \log_a F(x) \Leftrightarrow \log_a f(x) - \log_a F(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a \frac{f(x)}{F(x)} = 0, \\ f(x) > 0, \\ F(x) > 0, \\ a > 0, a \neq 1. \end{cases}$$

Чтобы не делать каждый раз этого преобразования, мы в дальнейшем, уравнение вида $\log_a f(x) = \log_a F(x)$ будем называть **простейшим логарифмическим уравнением с одинаковыми основаниями логарифмов**. (Если говорить более строго, такое уравнение следует называть **обобщенным простейшим логарифмическим уравнением**.)

Например, $\log_5 x = \log_5 (x^2 + 2)$.

Если два логарифма с одинаковыми основаниями равны, то равны и выражения под знаком логарифма:

$$\begin{cases} \log_a f(x) = \log_a F(x), \\ f(x) > 0, \\ F(x) > 0, \\ a > 0, a \neq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = F(x), \\ f(x) > 0, \\ F(x) > 0, \\ a > 0, a \neq 1. \end{cases}$$

Пример 2. Решить уравнение $\log_2 (x-1) = \log_2 (x^2 - 2x + 1)$.

Решение.

Это уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x-1 > 0, \\ x^2-2x+1 > 0, \\ x-1 = x^2-2x+1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ (x-1)^2 > 0, \\ x^2-3x+2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Ответ: $x = 2$.

3.2. Простейшие логарифмические уравнения, содержащие показательную функцию. Логарифмо-показательные уравнения

Метод решения: по определению логарифма.

Пример 3. Решите уравнение $\log_2(2^x + 3) = 2 - x$.

Решение. Область допустимых значений – множество всех действительных чисел, так как при всех $x \in \mathbb{R}$, $2^x + 3 > 0$.

По определению логарифма имеем $2^x + 3 = 2^{2-x}$. Получим показательное уравнение, которое решим методом приведения к алгебраическому.

Пусть $2^x = y$, $y > 0$, получим уравнение $y + 3 - \frac{2^2}{y} = 0$, $y^2 + 3y - 4 = 0$, $y_1 = -4$,

$y_2 = 1$. $y_1 = -4$ - не удовлетворяет условию $y > 0$ и является посторонним.

$$2^x = 1 \Rightarrow x = 0.$$

Ответ: $x = 0$.

Пример 2. Решите уравнение $\log_2(2^x - 2) = 3 - x$.

Решение. Область допустимых значений:

$$2^x - 2 > 0, \quad 2^x > 2 \Rightarrow x > 1, \quad x \in (1; \infty).$$

По определению логарифма имеем $2^x - 2 = 2^{3-x}$. Получим показательное уравнение, которое решим методом приведения к алгебраическому.

Пусть $2^x = y$, $y > 0$, получим уравнение $y - 2 - \frac{2^3}{y} = 0$, $y^2 - 2y - 8 = 0$, $y_1 = -2$,

$y_2 = 4$. $y_1 = -2$ - не удовлетворяет условию $y > 0$ и является посторонним.

$$2^x = 4 \Rightarrow x = 2, \quad 2 \in (1; \infty).$$

Ответ: 2.

Пример 3. Решите уравнение $\log_5(7+3 \cdot 5^{-x}) - x = 1$.

Решение. Область допустимых значений – множество всех действительных чисел, так как при всех $x \in R$, $7+3 \cdot 5^{-x} > 0$.

Преобразуем уравнение: $\log_5(7+3 \cdot 5^{-x}) = x+1$.

По определению логарифма имеем $7+3 \cdot \frac{1}{5^x} = 5^{x+1}$. Получим показательное уравнение, которое решим методом приведения к алгебраическому.

Пусть $5^x = y$, $y > 0$, получим уравнение $7+3 \cdot \frac{1}{y} - 5 \cdot y = 0$, $-5y^2 + 7y + 3 = 0$,
 $5y^2 - 7y - 3 = 0$, $D = 49 + 60 = 109$, $y_1 = \frac{7 - \sqrt{109}}{10}$, $y_2 = \frac{7 + \sqrt{109}}{10}$. $y_1 = \frac{7 - \sqrt{109}}{10}$ – не удовлетворяет условию $y > 0$ и является посторонним.

$$5^x = \frac{7 + \sqrt{109}}{10} \Rightarrow x = \log_5 \left(\frac{7 + \sqrt{109}}{10} \right).$$

Ответ: $\log_5 \left(\frac{7 + \sqrt{109}}{10} \right)$.

Пример 4. Решите уравнение $\log_3(2 \cdot 3^{-x} + 5) + 1 = x$.

Решение. Область допустимых значений – множество всех действительных чисел, так как при всех $x \in R$, $2 \cdot 3^{-x} + 5 > 0$.

Преобразуем уравнение: $\log_3(2 \cdot 3^{-x} + 5) = x - 1$.

По определению логарифма имеем $2 \cdot \frac{1}{3^x} + 5 = \frac{3^x}{3}$. Получим показательное уравнение, которое решим методом приведения к алгебраическому.

Пусть $3^x = y$, $y > 0$, получим уравнение $2 \cdot \frac{1}{y} + 5 - \frac{y}{3} = 0$, $-y^2 + 15y + 6 = 0$,
 $y^2 - 15y - 6 = 0$, $D = 225 + 24 = 249$, $y_1 = \frac{15 - \sqrt{249}}{2}$, $y_2 = \frac{15 + \sqrt{249}}{2}$. $y_1 = \frac{15 - \sqrt{249}}{2}$ – не удовлетворяет условию $y > 0$ и является посторонним.

$$3^x = \frac{15 + \sqrt{249}}{2} \Rightarrow x = \log_3 \left(\frac{15 + \sqrt{249}}{2} \right).$$

Ответ: $\log_3 \left(\frac{15 + \sqrt{249}}{2} \right)$.

Пример 5. Решить уравнение $\log_3(4 \cdot 3^{x-1} + 4) = 2x - 1$.

Решение. Область допустимых значений – множество всех действительных чисел: $x \in R$, так как $4 \cdot 3^{x-1} + 4 > 0$ при $x \in R$.

По определению логарифма получаем:

$$3^{2x-1} = 4 \cdot 3^{x-1} + 4 \Leftrightarrow \frac{(3^x)^2}{3} - 4 \cdot \frac{3^x}{3} - 4 = 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 4 \cdot 3^x - 12 = 0.$$

Пусть $3^x = y$, $y > 0$, получим систему:

$$\begin{cases} y > 0 \\ y^2 - 4y - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ y_1 = -2, y_2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow y = 6.$$

$$3^x = 6 \Leftrightarrow x = \log_3 6.$$

Ответ: $\log_3 6$.

Пример 6. Решить уравнение $\log_3(3^x - 8) = 2 - x$.

Решение. Область допустимых значений $3^x - 8 > 0 \Leftrightarrow 3^x > 8 \Leftrightarrow x > \log_3 8 \Leftrightarrow x > 3\log_3 2$ или $x \in (3\log_3 2; \infty)$.

По определению логарифма имеем $3^{2-x} = 3^x - 8 \Leftrightarrow 3^x - \frac{9}{3^x} - 8 = 0$.

Пусть $3^x = y$, $y > 0$, получим систему:

$$\begin{cases} y > 0 \\ y - 8 - \frac{9}{y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ y^2 - 8y - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ y_1 = -1, y_2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow y = 9.$$

$$3^x = 9 \Leftrightarrow x = 2; \quad 2 \in (3\log_3 2; \infty).$$

Ответ: 2.

Пример 7. Решить уравнение $\lg 6 + x \lg 5 = x + \lg(2^x + 1)$.

Решение. Область допустимых значений: $2^x + 1 > 0$, $x \in R$.

$$\begin{aligned} \text{Преобразуем уравнение: } \lg 6 + x \lg 5 - x &= \lg(2^x + 1) \Leftrightarrow \lg 6 + x(\lg 5 - 1) = \lg(2^x + 1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lg 6 - x(\lg 10 - \lg 5) &= \lg(2^x + 1) \Leftrightarrow \lg 6 - x \lg 2 = \lg(2^x + 1) \Leftrightarrow \lg 6 - \lg 2^x = \lg(2^x + 1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lg \frac{6}{2^x} &= \lg(2^x + 1) \Leftrightarrow 2^x + 1 = \frac{6}{2^x} \Leftrightarrow 2^x + 1 - \frac{6}{2^x} = 0. \end{aligned}$$

Пусть $2^x = y$, $y > 0$, тогда получим систему:

$$\begin{cases} y > 0 \\ y + 1 - \frac{6}{y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ y^2 + y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ y_1 = -3, y_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow y = 2, \quad 2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Ответ: 1.

Рассмотрим логарифмические уравнения, в основании которых содержится переменная

Определение 3. Простейшим логарифмическим уравнением с переменным основанием логарифма называется уравнение вида:

$$\log_{g(x)} f(x) = b,$$

где $g(x)$ - параметр или функция переменной x .

Например, $\log_{(x-3)}(x^2 - 5x + 6) = 2$.

Определение 4. Простейшим логарифмическим уравнением с одинаковыми переменными основаниями логарифмов называется уравнение вида:

$$\log_{g(x)} f(x) = \log_{g(x)} F(x),$$

где $g(x)$ - параметр или функция переменной x .

Замечание. Уравнение вида $\log_{g(x)} f(x) = \log_{g(x)} F(x)$ не является простейшим логарифмическим уравнением. Однако его можно привести к простейшему логарифмическому уравнению:

$$\log_{g(x)} f(x) = \log_{g(x)} F(x) \Leftrightarrow \log_{g(x)} f(x) - \log_{g(x)} F(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{g(x)} \frac{f(x)}{F(x)} = 0, \\ f(x) > 0, \\ F(x) > 0, \\ g(x) > 0, g(x) \neq 1. \end{cases}$$

Чтобы не делать каждый раз этого преобразования мы в дальнейшем уравнение вида $\log_{g(x)} f(x) = \log_{g(x)} F(x)$ будем называть **простейшим логарифмическим уравнением с одинаковыми основаниями логарифмов**.

Пример 8. Решите уравнение $\log_x(x^4 + x^2 - 2x - 3) = 4$.

Решение. Область допустимых значений: $\begin{cases} x^4 + x^2 - 2x - 3 > 0, \\ x > 0, \quad x \neq 1. \end{cases}$

По определению логарифма имеем $x^4 + x^2 - 2x - 3 = x^4$, $x^2 - 2x - 3 = 0$,
 $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

Проверим, входят ли полученные значения в область допустимых значений.

При $x_1 = -1$, получим $\begin{cases} 1 + 1 + 2 - 3 > 0, \\ -1 > 0, \quad -1 \neq 1 \end{cases}$ система не выполняется, значит,

$x_1 = -1$ не является корнем уравнения.

При $x_2 = 3$, получим $\begin{cases} 81 + 9 - 6 - 3 > 0, \\ 3 > 0, \quad 3 \neq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 81 > 0, \\ 3 > 0, \quad 3 \neq 1, \end{cases}$ система выполняется,

значит, $x_2 = 3$ является корнем уравнения.

Ответ: 3.

Пример 9. Решите уравнение $\log_{x-1}(x^3 - 2x^2 + x - 4) = 3$.

Решение. Область допустимых значений: $\begin{cases} x^3 - 2x^2 + x - 4 > 0, \\ x > 1, \quad x \neq 2. \end{cases}$

По определению логарифма имеем:

$x^3 - 2x^2 + x - 4 = (x-1)^3$, $x^3 - 2x^2 + x - 4 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, $x^2 - 2x - 3 = 0$, $x_1 = -1$,
 $x_2 = 3$.

Проверим, входят ли полученные значения в область допустимых значений.

При $x_1 = -1$, получим $\begin{cases} -1 - 2 - 1 - 4 > 0, \\ -1 > 1, \quad -1 \neq 2 \end{cases}$ система не выполняется, значит,

$x_1 = -1$ не является корнем уравнения.

При $x_2 = 3$, получим $\begin{cases} 27 - 18 + 3 - 4 > 0, \\ 3 > 1, \quad 3 \neq 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 > 0, \\ 3 > 1, \quad 3 \neq 2, \end{cases}$ система выполняется,

значит, $x_2 = 3$ является корнем уравнения.

Ответ: 3.

Пример 10. Решите уравнение

$$\log_{\frac{1}{x+1}}(x^2 + 2x + 1) + \log_{x+1}(x + 3) = 0.$$

Решение. Область допустимых значений:

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 1 > 0, \\ x + 3 > 0, \\ x + 1 > 0, \\ x + 1 \neq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 1)^2 > 0, \\ x > -3, \\ x > -1, \\ x \neq 0, \end{cases} \Rightarrow (-1; 0) \cup (0; \infty).$$

Преобразуем уравнение:

$$\frac{\log_{x+1}(x + 1)^2}{\log_{x+1}(x + 1)^{-1}} + \log_{x+1}(x + 3) = 0, \Leftrightarrow \log_{x+1}(x + 3) - \log_{x+1}(x + 1)^2 = \log_{x+1} 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{x+1}(x + 3) = \log_{x+1} 1 + \log_{x+1}(x + 1)^2 \Leftrightarrow x + 3 = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow.$$

$$\Leftrightarrow x_1 = -2, x_2 = 1$$

$x_1 = -2$ не входит в область допустимых значений и является посторонним корнем.

$x_2 = 1$ - входит в область допустимых значений

Ответ: 1.

Пример 11. Решите уравнение $\log_{\frac{1}{2}}(5x - 1) = -2$.

Решение. Область допустимых значений: $5x - 1 > 0, x > \frac{1}{5}, \left(\frac{1}{5}; \infty\right)$.

По определению логарифма, имеем: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 5x - 1, 5x - 1 = 2^2, 5x = 5, x = 1$.

$x = 1$ входит в область допустимых значений, $1 \in \left(\frac{1}{5}; \infty\right)$.

Ответ: 1.

Пример 12. Решите уравнение $\log_4 \log_3 \log_2 x = \frac{1}{2}$.

Решение.

$$\text{Область допустимых значений: } \begin{cases} x > 0, \\ \log_2 x > 0, \\ \log_3 \log_2 x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x > \log_2 1 \\ \log_3 \log_2 x > \log_3 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x > 1, \\ \log_2 x > 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x > 1, \\ \log_2 x > \log_2 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x > 1, \\ x > 2, \end{cases} \Leftrightarrow x > 2 \Leftrightarrow x \in (2; \infty).$$

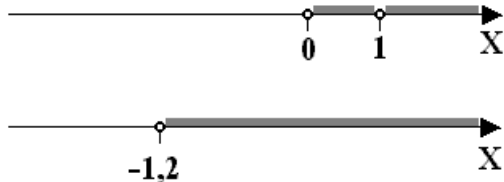
По определению логарифма, имеем: $\log_3 \log_2 x = 4^{\frac{1}{2}}$, $\log_3 \log_2 x = 2$, $\log_2 x = 9$, $x = 2^9$. $x = 2^9$ входит в область допустимых значений, $2^9 \in (0; \infty)$.

Ответ: 2^9 .

Пример 13. Решите уравнение $\log_x (6x + 5x^2) = 3$.

Решение. Область допустимых значений:

$$\begin{cases} x > 0, & x \neq 1, \\ 6x + 5x^2 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, & x \neq 1, \\ x(5x + 6) > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, & x \neq 1, \\ 5x + 6 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, & x \neq 1, \\ x > -1,2. \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 1) \cup (1; \infty)$$



По определению логарифма, имеем:

$$x^3 = 5x^2 + 6x, \quad x(x^2 - 5x - 6) = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 6.$$

$x_1 = 0$, $x_2 = -1$ не входит в область допустимых значений и являются посторонними корнями. Остается один корень: $x = 6$.

Проверим значение $x = 1$, при котором основание обращается в 1, получим:

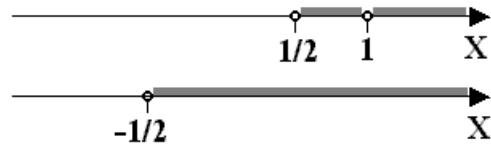
$\log_1 11 = 3$ — равенство не выполняется. $x = 1$ не удовлетворяет уравнению.

Ответ: 6.

Пример 14. Решите уравнение $\log_{2x-1} \frac{x^4+2}{2x+1} = 1$.

Решение. Область допустимых значений:

$$\begin{cases} 2x-1 > 0, & 2x-1 \neq 1, \\ \frac{x^4+2}{2x+1} > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2}, & x \neq 1, \\ 2x+1 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2}, & x \neq 1, \\ x > -\frac{1}{2}. \end{cases}$$



Получим объединение промежутков: $\left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; \infty)$.

По определению логарифма, имеем:

$$\frac{x^4+2}{2x+1} = 2x-1, \quad x^4 - 4x^2 + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1, \\ x^2 = 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1, & x_2 = 1, \\ x_3 = -\sqrt{3}, & x_4 = \sqrt{3}. \end{cases}$$

$x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = -\sqrt{3}$ не входят в область допустимых значений, и являются посторонними корнями. Остается один корень: $x = \sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{3}$.

Упражнения для самостоятельного решения

Решите уравнения:

1. $\log_2(x-3) = 4$.
2. $\log_2(2^x - 3) = 2 - x$.
3. $\log_3(3^{-x+1} + 1) + 2 = x$.
4. $\lg \lg \lg x = 0$.
5. $\log_5(-1 + 26 \cdot 5^{x-2}) = 2x - 2$.
6. $\lg 2 + \lg(4^{x-2} + 9) = 1 + \lg(2^{x-2} + 1)$.
7. $\log_3(3^x + 6) = 3 - x$.
8. $\log_5(3 + 5^{-x}) - x = 2$.
9. $\log_{x+1}(x^3 + 4x^2 + 5x - 2) = 3$.
10. $\log_x(4x^2 - 3x) = 3$.
11. $\log_2(9 - 2^x) = 3 - x$.
12. $\log_4(2 - x) = \log_4 5$.

3.3. Логарифмические уравнения, содержащие суммы и разности логарифмов, умножение логарифма на число

Метод решения: применение свойств логарифмов.

Для решения уравнений вида:

$$\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a u(x), \quad (1)$$

$$\log_a f(x) - \log_a g(x) = \log_a u(x), \quad (2)$$

$$p \log_a f(x) = \log_a u(x), \quad (3)$$

используются формулы

$$\log_a x + \log_a y = \log_a(xy), \quad (4)$$

$$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}, \quad (5)$$

$$p \cdot \log_a x = \log_a x^p, \quad (6)$$

которые приводят уравнения к следующим:

$$\log_a (f(x) \cdot g(x)) = \log_a u(x), \quad (7)$$

$$\log_a \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \log_a u(x), \quad (8)$$

$$\log_a (f(x))^p = \log_a u(x). \quad (9)$$

Дальнейшее решение полученных уравнений выполняется как простейших, т. е. приводятся к одной из следующих трех систем:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ u(x) > 0, \\ f(x) \cdot g(x) = u(x). \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ u(x) > 0, \\ \frac{f(x)}{g(x)} = u(x). \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ u(x) > 0, \\ f^p(x) = u(x). \end{cases} \quad (12)$$

Замечание. Если при решении уравнения с помощью формул (4) - (6) производятся преобразования вида $\log_a(f(x) \cdot g(x))$, $\log_a \frac{f(x)}{g(x)}$, $\log_a(f(x))^p$, где p - четное число, то возникает опасность потери корней заданного уравнения. Чтобы предотвратить возможную потерю корней, надо пользоваться указанными формулами в таком виде:

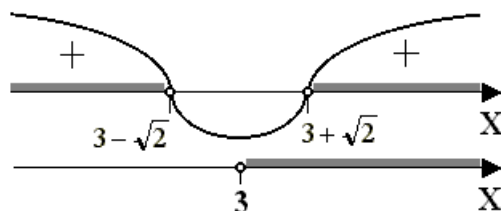
$$\log_a(f(x) \cdot g(x)) = \log_a|f(x)| + \log_a|g(x)|, \quad \log_a \frac{f(x)}{g(x)} = \log_a|f(x)| - \log_a|g(x)|,$$

$$\log_a(f(x))^p = p \log_a|f(x)|, \text{ где } p - \text{четное число.}$$

Пример 1. Решите уравнение $\lg(x^2 - 6x + 7) - \lg 100(x - 3) + 2 = 0$.

Решение. Область допустимых значений:

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 7 > 0, \\ 100(x - 3) > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - (3 - \sqrt{2}))(x - (3 + \sqrt{2})) > 0, \\ x > 3. \end{cases}$$



Получим промежуток $(3 + \sqrt{2}; \infty)$.

Преобразуем уравнение, используя свойства логарифмов:

$$\lg(x^2 - 6x + 7) - \lg 100 - \lg(x - 3) + 2 = 0, \quad \lg(x^2 - 6x + 7) - 2 - \lg(x - 3) + 2 = 0,$$

$$\lg(x^2 - 6x + 7) = \lg(x - 3), \quad x^2 - 6x + 7 = x - 3, \quad x^2 - 7x + 10 = 0, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 5.$$

$x_1 = 2$ — не входит в область допустимых значений и является посторонним корнем.

Ответ: 5.

Пример 2. Решите уравнение: $\log_2(4 \cdot 3^x - 9) - \log_2(9^x - 6) = 1$

Решение. Область допустимых значений:

$$\begin{cases} 4 \cdot 3^x - 9 > 0, \\ 9^x - 6 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x > \frac{9}{4} \\ 3^{2x} > 6 \end{cases}$$

Показательная и логарифмическая функции с основанием 3 являются возрастающими, тогда получим:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \log_3 \frac{9}{4} \\ 2x > \log_3 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \log_3 \frac{9}{4} \\ x > \frac{1}{2} \log_3 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \log_3 \frac{9}{4} \\ x > \log_3 \sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow x > \log_3 \sqrt{6}, \quad x \in (\log_3 \sqrt{6}; \infty)$$

Преобразуем уравнение:

$$\log_2(4 \cdot 3^x - 9) = 1 + \log_2(9^x - 6), \quad \log_2(4 \cdot 3^x - 9) = \log_2 2 + \log_2(9^x - 6),$$

$$\log_2(4 \cdot 3^x - 9) = \log_2 2(9^x - 6), \quad 4 \cdot 3^x - 9 = 2(9^x - 6), \quad 4 \cdot 3^x - 9 - 2 \cdot 3^{2x} + 12 = 0,$$

$$2 \cdot 3^{2x} - 4 \cdot 3^x - 3 = 0.$$

Положим $3^x = y$, $y > 0$, получим систему:

$$\begin{cases} y > 0, \\ 2y^2 - 4y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ y_1 = \frac{2 - \sqrt{10}}{2}, y_2 = \frac{2 + \sqrt{10}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{2 + \sqrt{10}}{2}.$$

$$3^x = \frac{2 + \sqrt{10}}{2}, \quad x = \log_3 \frac{2 + \sqrt{10}}{2} \quad - \text{этот корень входит в область допустимых}$$

значений.

Проверка.

При $x = \log_3 \frac{2 + \sqrt{10}}{2}$ уравнение примет вид :

$$\log_2 \left(4 \cdot 3^{\log_3 \frac{2 + \sqrt{10}}{2}} - 9 \right) - \log_2 \left(9^{\log_3 \frac{2 + \sqrt{10}}{2}} - 6 \right) = 1,$$

$$\log_2 (4 + 2\sqrt{10} - 9) - \log_2 \left(\left(\frac{2 + \sqrt{10}}{2} \right)^2 - 6 \right) = 1,$$

$$\log_2 (2\sqrt{10} - 5) - \log_2 \left(\frac{4 + 4\sqrt{10} + 10}{4} - 6 \right) = 1, \quad \log_2 (2\sqrt{10} - 5) - \log_2 \left(\frac{2\sqrt{10} - 5}{2} \right) = 1,$$

$$\log_2 \left((2\sqrt{10} - 5) : \frac{2\sqrt{10} - 5}{2} \right) = 1, \quad \log_2 \left(\frac{2 \cdot (2\sqrt{10} - 5)}{2\sqrt{10} - 5} \right) = 1, \quad \log_2 2 = 1, \quad 1 = 1, \text{ значит,}$$

$x = \log_3 \frac{2 + \sqrt{10}}{2}$ удовлетворяет уравнению.

Ответ: $x = \log_3 \frac{2 + \sqrt{10}}{2}$.

Пример 3. Решите уравнение $\log_3(2 - x) - \log_3(2 + x) - \log_3 x + 1 = 0$.

Решение. Область допустимых значений:

$$\begin{cases} x > 0, \\ 2 - x > 0, \\ 2 + x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ -x > -2, \\ x > -2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x < 2, \\ x > -2. \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 2.$$

Получим промежуток $(0; 2)$.

Преобразуем уравнение, используя свойства логарифмов:

$$\log_3(2 - x) + 1 = \log_3(2 + x) + \log_3 x, \quad \log_3(2 - x) + \log_3 3 = \log_3(2x + x^2) \Leftrightarrow$$

$$\log_3(6 - 3x) = \log_3(2x + x^2) \Leftrightarrow 6 - 3x = 2x + x^2 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -6, \quad x_2 = 1.$$

$x_1 = -6$ - не входит в область допустимых значений $-6 \notin (0; 2)$ и является посторонним корнем; $1 \in (0; 2)$.

Ответ: 1.

Пример 4. Решите уравнение $\lg(3x - 2) - 2 = \frac{1}{2} \lg(x + 2) - \lg 50$.

Решение. Область допустимых значений:

$$\begin{cases} 3x - 2 > 0, \\ x + 2 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{2}{3}, \\ x > -2, \end{cases} \Rightarrow x > \frac{2}{3}.$$

Получим промежуток $\left(\frac{2}{3}; \infty\right)$.

Преобразуем уравнение, используя свойства логарифмов:

$$2\lg(3x - 2) - 4 = \lg(x + 2) - 2\lg 50, \quad \lg(3x - 2)^2 - \lg(x + 2) = \lg 10000 - \lg 2500,$$

$$\lg(3x - 2)^2 + \lg 2500 = \lg(x + 2) + \lg 10000, \quad \lg 2500(3x - 2)^2 = \lg 10000(x + 2),$$

$$2500(3x - 2)^2 = 10000(x + 2) \Leftrightarrow 9x^2 - 12x + 4 = 4x + 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 - 16x - 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{2}{9}, x_2 = 2.$$

$x_1 = -\frac{2}{9}$ – не входит в область допустимых значений $-\frac{2}{9} \notin \left(\frac{2}{3}; \infty\right)$ и

является посторонним корнем; $2 \in \left(\frac{2}{3}; \infty\right)$.

Ответ: 2.

Пример 5. Решите уравнение $\lg(x^2 - 125) - \lg(x - 6) = 2$.

Решение. Область допустимых значений:

$$\begin{cases} x^2 - 125 > 0, \\ x - 6 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 5\sqrt{5})(x + 5\sqrt{5}) > 0, \\ x > 6. \end{cases}$$

Получим промежуток $(5\sqrt{5}; \infty)$.

Преобразуем уравнение, используя свойства логарифмов:

$$\lg(x^2 - 125) = \lg 100 + \lg(x - 6), \quad x^2 - 125 = 100x - 600, \quad x^2 - 100x + 475 = 0,$$

$$x_1 = \frac{100 - 90}{2} = 5, \quad x_2 = \frac{100 + 90}{2} = 95, \quad x_1 = 5, \quad x_2 = 95.$$

$x_1 = 5$ – не входит в область допустимых значений $5 \notin (5\sqrt{5}; \infty)$ и является посторонним корнем; $95 \in (5\sqrt{5}; \infty)$.

Ответ: 95.

Пример 6. Решите уравнение

$$\frac{1}{2} \lg(x^2 + 3x - 3) + 2 = 2 \lg(x + 1) + 2 \lg \frac{1}{x + 1} + \log_2 4.$$

Решение. Область допустимых значений:

$$\begin{cases} x^2 + 3x - 3 > 0, \\ x + 1 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \frac{-3 - \sqrt{21}}{2}\right) \left(x - \frac{-3 + \sqrt{21}}{2}\right) > 0, \\ x > -1. \end{cases}$$

Получим промежуток $\left(\frac{-3 + \sqrt{21}}{2}; \infty\right)$.

Преобразуем уравнение, используя свойства логарифмов:

$$\frac{1}{2} \lg(x^2 + 3x - 3) + \log_2 4 = 2 \lg(x + 1) - 2 \lg(x + 1) + \log_2 4,$$

$$\frac{1}{2}\lg(x^2 + 3x - 3) = 0, \lg(x^2 + 3x - 3) = 0, x^2 + 3x - 3 = 1, x^2 + 3x - 4 = 0,$$

$$x_1 = -4, x_2 = 1.$$

$x_1 = -4$ — не входит в область допустимых значений и является посторонним корнем.

Ответ: 1.

Пример 7. Решите уравнение

$$\lg \sqrt{5x-4} + \lg \sqrt{x+1} = 2 + \lg 0,18.$$

Решение. Область допустимых значений:

$$\begin{cases} 5x-4 > 0, \\ x+1 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0,8, \\ x > -1, \end{cases} \Rightarrow x > 0,8 \text{ или } (0,8; \infty).$$

Преобразуем уравнение, используя свойства логарифмов:

$$\frac{1}{2}\lg(5x-4) + \frac{1}{2}\lg(x+1) = \lg 18, \lg(5x-4) + \lg(x+1) = 2\lg 18, (5x-4)(x+1) = 18^2,$$

$$5x^2 + x - 328 = 0, D = 1 + 6560 = 6561, \sqrt{6561} = 81, x_1 = \frac{-1-81}{10} = -8,2, x_2 = 8.$$

$x_1 = -8,2$ — не входит в область допустимых значений $-8,2 \notin (0,8; \infty)$ и является посторонним корнем; $8 \in (5\sqrt{5}; \infty)$.

Ответ: 8.

Пример 8. Решите уравнение

$$\lg \sqrt{x^2 - 55x + 90} = 0,5(\lg(x-36) + \lg 2).$$

Решение. Область допустимых значений:

$$\begin{cases} x^2 - 55x + 90 > 0, \\ x > 36. \end{cases}$$

Преобразуем уравнение, используя свойства логарифмов:

$$\frac{1}{2}\lg(x^2 - 55x + 90) = \frac{1}{2}(\lg(2x-72)), \lg(x^2 - 55x + 90) = \lg(2x-72),$$

$$x^2 - 57x + 162 = 0, D = 3249 - 648 = 2601, \sqrt{2601} = 51, x_1 = \frac{57-51}{2} = 3, x_2 = 54.$$

$x_1 = 3$ — не входит в область допустимых значений и является посторонним корнем.

Ответ: 54.

Пример 9. Решите уравнение

$$\lg \sqrt{x+7} - \lg 2 = \lg(x-5) - \lg 8.$$

Решение. Область допустимых значений:

$$\begin{cases} x+7 > 0, \\ x-5 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -7, \\ x > 5, \end{cases} \Rightarrow x > 5 \text{ или } x \in (5; \infty).$$

Преобразуем уравнение, используя свойства логарифмов:

$$\frac{1}{2} \lg(x+7) = \lg(x-5) - 2 \lg 2, \quad \lg(x+7) = 2 \lg(x-5) - 4 \lg 2, \quad x+7 = \frac{(x-5)^2}{16},$$

$$16x + 112 = x^2 - 10x + 25, \quad x^2 - 26x - 87 = 0, \quad D = \sqrt{1024} = 32,$$

$$x_1 = \frac{26-32}{2} = -3, \quad x_2 = 29.$$

$x_1 = -3$ — не входит в область допустимых значений и является посторонним корнем.

Ответ: 29.

Пример 10. Решите уравнение

$$2 \log_3 \sqrt{x} + \log_3 \sqrt{x^2 - 2x + 1} = \log_3 3 + 2 \log_3 2.$$

Решение. Область допустимых значений:

$$\begin{cases} x > 0, \\ (x-1)^2 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \end{cases} \Rightarrow (0; 1) \cup (1; \infty).$$

Преобразуем уравнение, используя свойства логарифмов:

$$\log_3 (\sqrt{x})^2 + \log_3 \sqrt{(x-1)^2} = \log_3 3 + \log_3 4, \quad \log_3 (x \cdot |x-1|) = \log_3 12, \quad x \cdot |x-1| = 12.$$

Это уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$(1) \begin{cases} 0 < x < 1, \\ x \cdot (-(x-1)) = 12, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1, \\ x^2 - x + 12 = 0, \end{cases} \text{ решений нет.}$$

$$(2) \begin{cases} x > 1, \\ x \cdot (x-1) = 12, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x^2 - x - 12 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x_1 = -3 \\ x_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Ответ: 4.

Упражнения для самостоятельного решения.

Решите уравнения:

1. $\log_2 x + \log_2 (x-1) = 1.$

2. $\log_5 (2^x - 4) + \log_5 (2^x - 5) = \log_5 (2^x + 11).$

3. $\frac{1}{2} \lg(x^2 + 7x + 7) + 3 = 2 \lg(x + 3) + \lg \frac{1}{(x+3)^2} + \lg 10^3.$

4. $\lg \sqrt{x} + \lg \frac{1}{2} = (\lg(x-12) - \lg 8) \cdot \log_2 \sqrt{4}.$

5. $\lg(\sqrt{x+1} + 3) = 2 \lg \sqrt{x-38}.$

3.4. Логарифмические уравнения, решаемые методом введения новой переменной

Логарифмические уравнения, содержащие одинаковые основания, но различные степени логарифмов.

Метод решения: введение новой переменной и приведение к алгебраическим уравнениям.

Пример 1. Решите уравнение $\log_2(6 - 4^x) = 7^{\log_7 x}.$

Решение. Найдем область допустимых значений из системы неравенств:

$$\begin{cases} 6 - 4^x > 0, \\ x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4^x > -6, \\ x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^x < 6, \\ x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \log_4 6, \\ x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < \log_4 6.$$

Преобразуем уравнение: $\log_2(6 - 4^x) = 7^{\log_7 x}, \log_2(6 - 4^x) = x.$

По определению логарифма будем иметь: $2^x = 6 - 4^x, 4^x + 2^x - 6 = 0.$

Пусть $2^x = y$, $y > 0$, тогда получим квадратное уравнение:

$$y^2 + y - 6 = 0, \quad y_1 = -3, \quad y_2 = 2.$$

Первый корень, $y_1 = -3$ не удовлетворяет условию $y > 0$ и является посторонним.

$$2^x = 2, \quad x = 1.$$

$x = 1$ - входит в область допустимых значений.

Проверка.

При $x = 1$ уравнение примет вид: $\log_2(6 - 4^1) = 7^{\log_7 1}$, $\log_2 2 = 7^0$, $1 = 1$, значит, $x = 1$ является корнем уравнения.

Ответ: 1.

Пример 2. Решите уравнение $0,1 \cdot \lg^4 x - \lg^2 x + 0,9 = 0$.

Решение. Область допустимых значений: $x > 0$.

Пусть $\lg^2 x = y$, $y \geq 0$, получим уравнение $0,1 \cdot y^2 - y + 0,9 = 0$, $y^2 - 10y + 9 = 0$,

$$y_1 = 1, \quad y_2 = 9. \quad \lg^2 x = 1, \quad \lg x = -1, \quad x_1 = 0,1; \quad \lg x = 1, \quad x_2 = 10;$$

$$\lg^2 x = 9, \quad \lg x = -3, \quad x_3 = 0,001; \quad \lg x = 3, \quad x_4 = 1000.$$

Ответ: 0,001; 0,1; 10; 1000.

Пример 3. Решите уравнение $\frac{1}{2} \cdot \log_3 9 - \log_3 x + \log_3^2 x = 3$.

Решение. Область допустимых значений: $x > 0$.

Преобразуем уравнение: $\frac{1}{2} \cdot 2 - \log_3 x + \log_3^2 x = 3$, $\log_3^2 x - \log_3 x - 2 = 0$.

Пусть $\log_3 x = y$, получим уравнение $y^2 - y - 2 = 0$, $y_1 = -1$, $y_2 = 2$.

$$\log_3 x = -1, \quad x_1 = \frac{1}{3}; \quad \log_3 x = 2, \quad x_2 = 9.$$

Ответ: $\frac{1}{3}$; 9.

Рассмотрим логарифмические уравнения, содержащие одинаковые основания, но различные выражения под логарифмом

Пример 4. Решите уравнение $\log_2^2 x + 3 = 2\log_2 x^2$.

Решение. Область допустимых значений: $x > 0$.

Преобразуем уравнение: $\log_2^2 x - 4\log_2 x + 3 = 0$.

Пусть $\log_2 x = y$, получим уравнение $y^2 - 4y + 3 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = 3$.

$\log_2 x = 1$, $x_1 = 2$, $\log_2 x = 3$, $x_2 = 8$.

Ответ: 2; 8.

Пример 5. Решите уравнение $\lg^2 x - \lg x^2 = \lg^2 3 - 1$.

Решение. Область допустимых значений: $x > 0$.

Преобразуем уравнение: $\lg^2 x - 2\lg x - (\lg^2 3 - 1) = 0$.

Пусть $\lg x = y$, получим уравнение

$y^2 - 2y - (\lg^2 3 - 1) = 0$, $D = 4 + 4\lg^2 3 - 4 = 4\lg^2 3$, $y_1 = 1 - \lg 3 = \lg \frac{10}{3}$, $y_2 = \lg 30$.

$\lg x = \lg \frac{10}{3}$, $x_1 = \frac{10}{3}$, $\lg x = \lg 30$, $x_2 = 30$.

Ответ: $\frac{10}{3}$; 30.

Пример 6. Решите уравнение $\lg^2 x^3 - 20\lg \sqrt{x} + 1 = 0$.

Решение. Область допустимых значений: $x > 0$.

Преобразуем уравнение: $(\lg x^3)^2 - 20 \cdot \frac{1}{2} \lg x + 1 = 0$, $9\lg^2 x - 10\lg x + 1 = 0$.

Пусть $\lg x = y$, получим уравнение

$9y^2 - 10y + 1 = 0$, $D = 100 - 36 = 64$, $y_1 = \frac{10-8}{18} = \frac{1}{9}$, $y_2 = 1$.

$\lg x = \frac{1}{9}$, $x_1 = 10^{\frac{1}{9}}$, $\lg x = 1$, $x_2 = 10$.

Ответ: $10^{\frac{1}{9}}$; 10.

Пример 7. Решите уравнение $\log_2^3 x + \log_2 x^6 = \log_2 x^{5\log_2 x}$.

Решение. Область допустимых значений: $x > 0$.

Преобразуем уравнение:

$$\log_2^3 x + 6\log_2 x - 5\log_2 x \cdot \log_2 x = 0, \quad \log_2 x \cdot (\log_2^2 x - 5\log_2 x + 6) = 0.$$

$$\log_2 x = 0, \quad x_1 = 1; \quad \log_2^2 x - 5\log_2 x + 6 = 0.$$

Пусть $\log_2 x = y$, получим уравнение

$$y^2 - 5y + 6 = 0, \quad y_1 = 2, \quad y_2 = 3. \quad \log_2 x = 2, \quad x_2 = 4, \quad \log_2 x = 3, \quad x_3 = 8.$$

Ответ: 1; 4; 8.

Логарифмические уравнения, содержащие разные основания логарифмов

Метод решения: переход к логарифмам одного основания с использованием формулы перехода от логарифма одного основания к основанию другого логарифма.

Пример 8. Решите уравнение $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = 5,5$.

Решение. Область допустимых значений: $x > 0$.

Перейдем в каждом логарифме к основанию 3, применяя формулу перехода:

$$\log_3 x + \frac{\log_3 x}{\log_3 9} + \frac{\log_3 x}{\log_3 27} = 5,5, \quad \log_3 x \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 5,5, \quad \log_3 x \cdot \frac{11}{6} = 5,5, \quad \log_3 x = 5,5 \cdot \frac{6}{11},$$

$$\log_3 x = 3, \quad x = 27.$$

Ответ: 27.

Пример 9. Решить уравнение $5\log_{\frac{x}{9}} x + \log_{\frac{9}{x}} x^3 + 8\log_{9x^2} x^2 = 2$.

Решение. Область допустимых значений:

$$\begin{cases} x > 0, \\ \frac{x}{9} \neq 1, \\ 9x^2 \neq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 9, \\ x^2 \neq \frac{1}{9}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 9, \\ x \neq \pm \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Преобразуем уравнение. Перейдем к логарифмам по основанию 9, получим:

$$5 \frac{\log_9 x}{\log_9 x - \log_9 9} + \frac{\log_9 x^3}{\log_9 9 - \log_9 x} + 8 \frac{\log_9 x^2}{\log_9 9 + \log_9 x^2} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5 \log_9 x}{\log_9 x - 1} + \frac{3 \log_9 x}{1 - \log_9 x} + \frac{16 \log_9 x}{1 + 2 \log_9 x} = 2.$$

Пусть $\log_9 x = y$, тогда получим уравнение $\frac{5y}{y-1} + \frac{3y}{1-y} + \frac{16y}{1+2y} = 2 \Leftrightarrow$

$$\frac{5y}{y-1} - \frac{3y}{y-1} + \frac{16y}{1+2y} = 2 \Leftrightarrow \frac{2y}{y-1} + \frac{16y}{1+2y} = 2 \Leftrightarrow 2y + 4y^2 + 16y^2 - 16y = 4y^2 - 2y - 2,$$

$$16y^2 - 12y + 2 = 0 \Leftrightarrow 8y^2 - 6y + 1 = 0, D = 36 - 32 = 4, y_1 = \frac{1}{4}, y_2 = \frac{1}{2}.$$

$$\log_9 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x_1 = \sqrt[4]{9}; \log_9 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_2 = 3.$$

Оба корня входят в область допустимых значений и являются решениями уравнения.

Ответ: $\sqrt[4]{9}; 3$.

Пример 10. Решите уравнение $\log_{3x} x = \log_{9x} x$.

Решение. Область допустимых значений:

$$\begin{cases} x > 0, \\ 3x \neq 1, \\ 9x \neq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq \frac{1}{3}, \\ x \neq \frac{1}{9}. \end{cases}$$

Пусть $x \neq 1$. Перейдем в каждом логарифме к основанию x , получим:

$$\frac{\log_x x}{\log_x 3x} = \frac{\log_x x}{\log_x 9x}, \frac{1}{\log_x 3 + \log_x x} = \frac{1}{\log_x 9 + \log_x x}, \frac{1}{\log_x 3 + 1} = \frac{1}{\log_x 3^2 + 1},$$

$$2 \log_x 3 + 1 = \log_x 3 + 1, \log_x 3 = 0, x^0 = 3, 1 \neq 3, \text{ корней нет.}$$

При $x = 1$ получим $\log_3 1 = \log_9 1, 0 = 0$, значит $x = 1$ - корень уравнения.

Ответ: 1.

Пример 11. Решите уравнение $\log_3 x = 1 + \log_x 9$.

Решение. Область допустимых значений:

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \end{cases} \Leftrightarrow (0; 1) \cup (1; \infty).$$

Перейдем в логарифме $\log_x 9$ к основанию 3, получим:

$$\log_x 9 = \frac{\log_3 9}{\log_3 x} = \frac{2}{\log_3 x}.$$

Уравнение примет вид: $\log_3 x = 1 + \frac{2}{\log_3 x}$. Пусть $\log_3 x = y$, получим

уравнение:

$$y = 1 + \frac{2}{y}, \quad y^2 - y - 2 = 0, \quad y_1 = -1, \quad y_2 = 2. \quad \log_3 x = -1, \quad x_1 = \frac{1}{3}, \quad \log_3 x = 2, \quad x_2 = 9.$$

При $x = 1$ получим $\log_3 1 = 1 + \log_1 9$, $0 \neq 1 + \log_1 9$, значит, $x = 1$ не является корнем уравнения.

Ответ: $\frac{1}{3}; 9$.

Упражнения для самостоятельного решения

Решите уравнения:

1. $\log_8 x + \log_4 x + \log_2 x = 11$.

2. $\left(\log_2 \left(5 - \frac{3}{x} \right) - 1 \right) \log_x 2 = 1$.

3. $\log_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3$.

4. $1 + \log_3 (2^x - 7) = \log_3 (2^x - 3) + \log_3 (2^x - 8)$.

5. $\log_2 (4^x - 2^{x+1} - 2) = 1 + \log_2 (2^{x+1} - 5)$.

6. $\frac{1}{6} \log_2 (x - 2) - \frac{1}{3} = \log_{\frac{1}{8}} \sqrt{3x - 5}$.

3.5. Показательно-логарифмические уравнения

Пример 1. Решите уравнение

$$6^{\frac{\log_1(x+3)}{6}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_4(x^2+5x+12)}$$

Решение. Область допустимых значений:

$$\begin{cases} x+3 > 0 \\ x^2+5x+12 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ -\infty < x < \infty \end{cases} \Leftrightarrow x > -3 \text{ или } x \in (-3; \infty).$$

Применим основное логарифмическое тождество. Для этого преобразуем уравнение:

$$\begin{aligned} 6^{\frac{\log_6(x+3)}{\log_6 \frac{1}{6}}} &= \left((2)^{-1}\right)^{\frac{\log_2(x^2+5x+12)}{\log_2 4}} \Leftrightarrow 6^{\frac{\log_6(x+3)}{-1}} = (2)^{\frac{\log_2(x^2+5x+12)}{-2}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(6^{\log_6(x+3)}\right)^{-1} &= \left(2^{\log_2(x^2+5x+12)}\right)^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow (x+3)^{-1} = (x^2+5x+12)^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x+3 &= \sqrt{x^2+5x+12} \Leftrightarrow x^2+6x+9 = x^2+5x+12 \Leftrightarrow x=3, 3 \in (-3; \infty). \end{aligned}$$

Ответ: 3.

Пример 2. Решить уравнение

$$9^{\log_{25}(x+1)^2} + 3 = 4 \cdot 9^{\log_{25}(x+1)}.$$

Решение. Область допустимых значений:

$$x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1, x \in (-1; \infty).$$

Преобразуем уравнение:

$$9^{2\log_{25}(x+1)} - 4 \cdot 9^{\log_{25}(x+1)} + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(9^{\log_{25}(x+1)}\right)^2 - 4 \cdot 9^{\log_{25}(x+1)} + 3 = 0.$$

Пусть $9^{\log_{25}(x+1)} = y$, $y > 0$, получим систему:

$$\begin{cases} y > 0 \\ y^2 - 4y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ y_1 = 1, y_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow y_1 = 1, y_2 = 3.$$

Получим совокупность уравнений:

$$\begin{cases} 9^{\log_{25}(x+1)} = 1 \\ 9^{\log_{25}(x+1)} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{25}(x+1) = 0 \\ \log_{25}(x+1) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=1 \\ x+1=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=0, \\ x_2=4. \end{cases} \begin{cases} 0 \in (-1; \infty), \\ 4 \in (-1; \infty). \end{cases}$$

Ответ: 0; 4.

Упражнения для самостоятельного решения

Решите уравнения:

1. $\log_{\pi} \log_3 \log_2 x = 0$
2. $\lg \sqrt{5x-4} + \lg \sqrt{x+4} = 2 + \lg \frac{9}{50}$
3. $\lg(3^{\sqrt{4x+1}} - 2^{4-\sqrt{4x+1}}) - 2 = \frac{1}{4} \lg 16 - 2 \lg 2^{\sqrt{x+0,25}}$
4. $\sqrt{x^{\lg \sqrt{x}}} = 10$
5. $\log_3 x = 1 + \log_x 9$
6. $\lg(-3x^2 + 15x - 8) = (\log_3 9)^{\log_2 1}$
7. $\log_4(3x^2 - 3x - 5,75) = \log_{0,5} 2$
8. $\log_{\sqrt[3]{x}}(x^3 + x^2 - 4x) = 6$
9. $\log_{\sqrt{2}} 9 \cdot \log_3 \sqrt[4]{2}(x-2) = 1$
10. $\log_2(9 - 2^x) = 3 - x$
11. $\log_2^2 x + 3 = 2 \log_2 x^2$
12. $\lg^2 x - \lg x^3 = \lg^2 3 - 1$
13. $\lg 6 - x \lg 5 = x + \lg(2^x + 1)$
14. $\lg \lg \lg x = 0$
15. $\log_7 \log_4 \log_3^2(x-7) = 0$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Багманов А.Т., Иванов Л.А., Толстых И.В.** Математика. Избранные задачи. Абитуриенту – 2002 для самостоятельной работы. – СПб.: СПбГТУ, 2002. 150 с.
2. **Виленкин Н.Я., Ивашев-Мусатов О.С., Шварцбурд С.И.** Алгебра и математический анализ для 11 класса. // Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. – М.: Просвещение, 1993.
3. **Доброва О.Н.** Задания по алгебре и математическому анализу. – М.: Просвещение, 1996.
4. **Ивлев Б.М., Абрамов А.М., Дудницын Ю.П., Шварцбурд С.И.** Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа. – М.: Просвещение, 1990.
5. **Потапов М.К., Олехник С.Н., Нестеренко Ю.В.** Математика для абитуриента. – М.: НТЦ «Университетский», 1994.
6. **Симонов А.Я., Бакаев Д.С., Эпельман А.Г.** и др. Система тренировочных задач и упражнений по математике. – М.: Просвещение, 1991.
7. **Сканави М.И.** Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы. / Учебное пособие. – М., 1994.
8. **Шарыгин И.Ф., Голубев В.И.** Факультативный курс по математике. – М.: Просвещение, 1991.