ГАОУ ВО «Дагестанский государственный университет народного хозяйства»

**КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ**

**Миспахов Арсен Шарафидинович**

Учебное пособие

# Математика

*Раздел:* ***« Уравнения и неравенства с параметрами»***

**(для студентов 1 курса всех специальностей Бизнес-колледжа)**


**Махачкала 2018**

УДК 51
ББК 22.143
***Миспахов А.Ш.*** Учебное пособие по математике. Раздел:
« Уравнения и неравенства с параметрами»– Махачкала: ДГУНХ, 2018г., 29 с.

Пособие содержит задачи и упражнения по всем основным темам раздела « Уравнения и неравенства с параметрами». По всем темам приведен в краткой форме теоретический материал. Подробные решения примеров помогут студентам при подготовке к практическим, лабораторным занятиям, при сдаче зачетов и экзаменов, а также для выполнения самостоятельных работ.

Учебное пособие по математике. Раздел: « Уравнения и неравенства с параметрами» размещен на сайте www.dgunh.ru.

Печатается по решению Учебно – методического совета Дагестанского государственного университета народного хозяйства.

# Содержание

# Введение.
# Уравнения и неравенства с параметрами.

Если в уравнении или неравенстве некоторые коэффициенты заданы не конкретными числовыми значениями, а обозначены буквами, то они называются *параметрами,* а само уравнение или неравенство *параметрическим.*

*Для того, чтобы решить уравнение или неравенство с параметрами необходимо:*

1. Выделить особое значение - это то значение параметра, в котором или при переходе через которое меняется решение уравнения или неравенства.
2. Определить допустимые значения – это значения параметра, при которых уравнение или неравенство имеет смысл.

*Решить уравнение или неравенство с параметрами означает:*

1) определить, при каких значениях параметров существуют решения;

2) для каждой допустимой системы значений параметров найти соответствующее множество решений.

Решить уравнение с параметром можно следующими методами: аналитическим или графическим.

***Аналитический метод*** предполагает задачу исследования уравнения рассмотрением нескольких случаев, ни один из которых нельзя упустить.

Решение уравнения и неравенства с параметрами каждого вида аналитическим методом предполагает подробный анализ ситуации и последовательное исследование, в ходе которого возникает необходимость **«аккуратного обращения»** с параметром.

***Графический метод*** предполагает построение графика уравнения, по которому можно определить, как влияет соответственно, на решение уравнения изменение параметра. График подчас позволяет аналитически сформулировать необходимые и достаточные условия для решения поставленной задач. Графический метод решения особенно эффективен тогда, когда нужно установить, сколько корней имеет уравнение в зависимости от параметра и обладает несомненным преимуществом увидеть это наглядно.

## § 1. Линейные уравнения и неравенства.

Линейное уравнение ***ax=b,*** записанное в общем виде, можно рассматривать как уравнение с параметрами, где *x* – неизвестное, ***a, b*** – параметры. Для этого уравнения особым или контрольным значением параметра является то, при котором обращается в нуль коэффициент при неизвестном.

При решении линейного уравнения с параметром рассматриваются случаи, когда параметр равен своему особому значению и отличен от него.

Особым значением параметра ***a*** является значение ***a = 0.***

1. Если $a \neq 0$, то при любой паре параметров *a* и *b* оно имеет единственное решение $x = \frac{b}{a}$.
2. Если $a = 0$, то уравнение принимает вид : $0x = b$. В этом случае значение $b = 0$ является особым значением параметра *b*.

    При $b \neq 0$ уравнение решений не имеет.

    При $b = 0$ уравнение примет вид: $0x = 0$. Решением данного уравнения является любое действительное число.

Неравенства вида ***ax > b и ax< b*** $(a \neq 0)$ называются линейными неравенствами. Множество решений неравенства $ax > b$ – промежуток $(\frac{b}{a}; +\infty)$, если $a > 0$, и $(-\infty; \frac{b}{a})$, если $a < 0$. Аналогично для неравенства $ax < b$ множество решений – промежуток $(-\infty; \frac{b}{a})$, если $a > 0$, и $(\frac{b}{a}; +\infty)$, если $a < 0$.

**Пример 1.** Решить уравнение $ax = 5$

Решение: Это линейное уравнение .

Если $a = 0$, то уравнение $0 \cdot x = 5$ решения не имеет.

Если $a \neq 0$, $x = \frac{5}{a}$ - решение уравнения.

<u>Ответ</u>: при $a \neq 0$, $x = \frac{5}{a}$

при а = 0 решения нет.

**<u>Пример 2.</u>** Решить уравнение $ax - 6 = 2a - 3x$.

<u>Решение:</u> Это линейное уравнение, $ax - 6 = 2a - 3x$ $(1)$

$$ax + 3x = 2a + 6$$

Переписав уравнение в виде $(a+3)x = 2(a+3)$, рассмотрим два случая: $a = -3$ и $a \neq -3$.

Если $a = -3$, то любое действительное число $x$ является корнем уравнения (1). Если же $a \neq -3$, уравнение (1) имеет единственный корень $x = 2$.

<u>Ответ:</u> При $a = -3$, $x \in R$; при $a \neq -3$, $x = 2$.

**<u>Пример 3.</u>** При каких значениях параметра $a$ среди корней уравнения $2ax - 4x - a^2 + 4a - 4 = 0$ есть корни больше $1$ ?

<u>Решение</u>: Решим уравнение $2ax - 4x - a^2 + 4a - 4 = 0$ – линейное уравнение

$$2(a - 2)\,x = a^2 - 4a + 4$$

$$2(a - 2)\,x = (a - 2)^2$$

При $a = 2$ решением уравнения $0x = 0$ будет любое число, в том числе и большее 1.

При $a \neq 2$ $x = \frac{a-2}{2}$. По условию $x > 1$, то есть $\frac{a-2}{2} > 1$, $a > 4$.

<u>Ответ:</u> При $a \in \{2\} \cup (4;\infty)$.

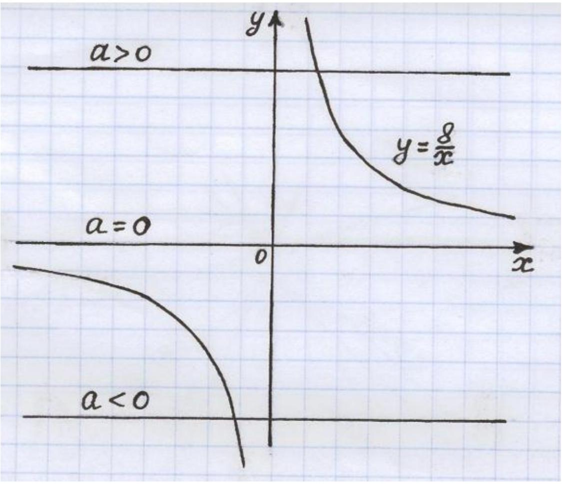
**Пример 4.** Для каждого значения параметра *a* найти количество корней уравнения $ax=8$.

Решение. $ax = 8$ – линейное уравнение.

$$a = \frac{8}{x},$$

$y = a$ – семейство горизонтальных прямых;

$y = \frac{8}{x}$ - графиком является гипербола. Построим графики этих функций.




Ответ: Если $a = 0$, то уравнение решений не имеет. Если $a \neq 0$, то уравнение имеет одно решение.

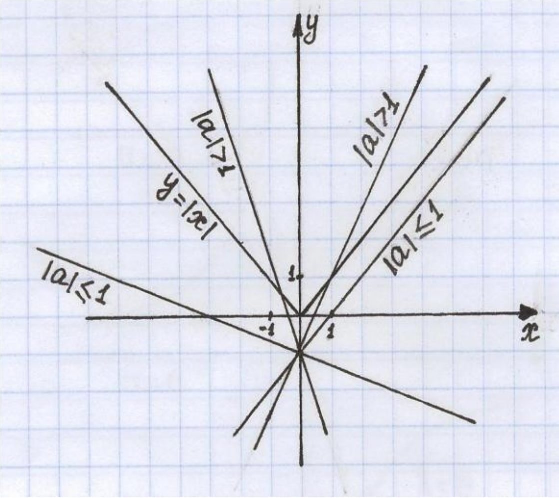
**Пример 5.** С помощью графиков выяснить, сколько корней имеет уравнение:

$|x| = ax - 1$.

$y = | x |$ ,

$y = ax - 1$ – графиком является прямая, проходящая через точку $(0;-1)$.

Построим графики этих функций.




Ответ:При $|a|>1$- один корень

при $|a|\le 1$ – уравнение корней не имеет.

**Пример 6.** Решить неравенство $ax + 4 > 2x + a^2$

Решение : $ax + 4 > 2x + a^2 \Leftrightarrow (a-2)x > a^2 - 4$. Рассмотрим три случая.

1. $a=2$ . Неравенство $0x > 0$ решений не имеет.
2. $a > 2$. $(a-2)x > (a-2)(a+2) \Leftrightarrow x > a+2$
3. $a < 2$. $(a-2)x > (a-2)(a+2) \Leftrightarrow x < a+2$

Ответ. $x > a + 2$ при $a > 2$; $x < a + 2$, при $a < 2$; при $a=2$ решений нет.

## § 2. Квадратные уравнения и неравенства

*Квадратное уравнение* – это уравнение вида $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$, где $\boldsymbol{a \neq 0}$, $\boldsymbol{a, b, c}$ – параметры.

Для решения квадратных уравнений с параметром можно использовать стандартные способы решения на применение следующих формул:

1) дискриминанта квадратного уравнения: $D = b^2 - 4ac$, $(\frac{D}{4} = k^2 - ac)$

2) формул корней квадратного уравнения: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$,

$(x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{D}}{a})$

Квадратными называются неравенства вида

$$ax^2 + bx + c > 0, \quad ax^2 + bx + c < 0, \quad (1), (2)$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0, \qquad ax^2 + bx + c \leq 0, \quad (3), (4)$$

Множество решений неравенства (3) получается объединением множеств решений неравенства (1) и уравнения , $ax^2 + bx + c=0$. Аналогично находится множество решений неравенства (4).

Если дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ меньше нуля, то при а >0 трехчлен положителен при всех $x \in R$.

Если квадратный трехчлен имеет корни ($x_1 < x_2$), то при а > 0 он положителен на множестве $(-\infty; x_2) \cup (x_2; +\infty)$ и отрицателен на интервале $(x_1; x_2)$. Если а < 0, то трехчлен положителен на интервале $(x_1; x_2)$ и отрицателен при всех $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.

**<u>Пример 1.</u>** Решить уравнение $ax^2 - 2(a-1)x - 4 = 0$.

Это квадратное уравнение

<u>Решение</u>: Особое значение $a = 0$.

1. При $a = 0$ получим линейное уравнение $2x - 4 = 0$. Оно имеет единственный корень $x = 2$.
2. При $a \neq 0$. Найдем дискриминант.

   $D = (a-1)^2 + 4a = (a+1)^2$

Если $a = -1$, то $D = 0$ – один корень.

Найдем корень, подставив вместо $a = -1$.

$-x^2 + 4x - 4 = 0$, то есть $x^2 - 4x + 4 = 0$, находим, что $x=2$.

Если $a \neq -1$, то $D>0$. По формуле корней получим: $x=\frac{(a-1)\pm(a+1)}{a}$;

$x_1=2,\ x_2= -\frac{2}{a}$.

<u>Ответ:</u> При $a=0$ и $a= -1$ уравнение имеет один корень $x = 2$; при $a \neq 0$ и $a \neq -1$ уравнение имеет два корня $x_1=2,\ x_2=-\frac{2}{a}$.

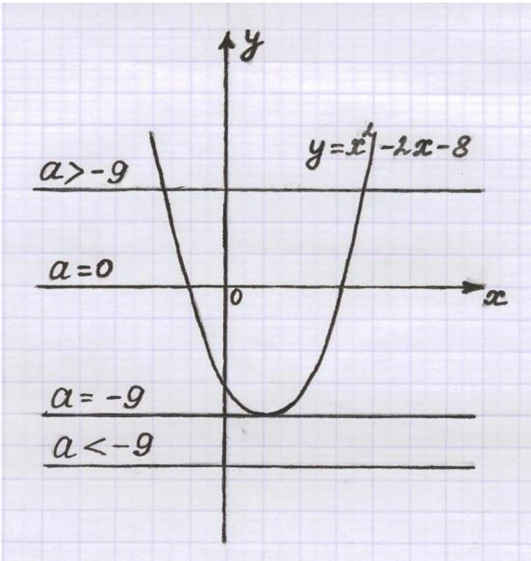
**<u>Пример 2.</u>** Найдите количество корней данного уравнения $x^2-2x-8-a=0$ в зависимости от значений параметра $a$.

Решение. Перепишем данное уравнение в виде $x^2-2x-8=a$

*y*= $x^2$-2*x*-8- графиком является парабола;

*y*=*a*- семейство горизонтальных прямых.

Построим графики функций.




Ответ: При *а* <-9, уравнение решений не имеет; при а=-9, уравнение имеет одно решение; при *а*>-9, уравнение имеет два решения.

**<u>Пример 3.</u>** При каких *а* неравенство $(a-3)\,x^2-2ax+3a-6>0$ выполняется для всех значений x ?

<u>Решение.</u> Квадратный трехчлен положителен при всех значениях х, если а-3 > 0 и D<0, т.е. при а, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} \grave{a}-3>0 \\ a^2-(a-3)(3a-6)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-3>0 \\ 2a^2-15a+18>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\in(3;+\infty) \\ a\in(-\infty;\frac{3}{2})\cup(6;+\infty) \end{cases},$$ откуда следует, что

*a* > 6.

<u>Ответ.</u> *a* > 6

## § 3. Дробно- рациональные уравнения с параметром, сводящиеся к линейным

Процесс решения дробных уравнений выполняется по обычной схеме: дробное заменяется целым путем умножения обеих частей уравнения на общий знаменатель левой и правой его частей. После чего решается целое уравнение, исключая посторонние корни, то есть числа, которые обращают знаменатель в нуль.

В случае уравнений с параметром эта задача более сложная. Здесь, чтобы «исключить» посторонние корни, требуется найти значение параметра, обращающее общий знаменатель в нуль, то есть решить соответствующие уравнения относительно параметра.

**<u>Пример 1.</u>** Решить уравнение $\frac{x-a}{x+2} = 0$

Это дробно- рациональное уравнение

<u>Решение:</u> *Д.З:* $x+2 \neq 0$, $x \neq -2$

$x - a = 0$, $x = a$.

<u>Ответ:</u> При $a \neq -2$, $x=a$

При $a = -2$ корней нет.

**<u>Пример 2</u>.** Решить уравнение $\frac{x}{a(x+1)} - \frac{2}{x+2} = \frac{3-a^2}{a(x+1)(x+2)}$ (1)

Это дробно- рациональное уравнение

<u>Решение:</u> Значение $a = 0$ является особым. При $a = 0$ уравнение теряет смысл и, следовательно, не имеет корней. Если $a \neq 0$, то после преобразований уравнение примет вид: $x^2 + 2(1-a)x + a^2 - 2a - 3 = 0$ *(2)* – квадратное уравнение.

Найдем дискриминант $\frac{D}{4} = (1-a)^2 - (a^2 - 2a - 3) = 4$, находим корни уравнения

$x_1 = a + 1$, $x_2 = a - 3$.

При переходе от уравнения (1) к уравнению (2) расширилась область определения уравнения (1), что могло привести к появлению посторонних корней. Поэтому, необходима проверка.

<u>П р о в е р к а.</u> Исключим из найденных значений $x$ такие, при которых $x_1+1=0$, $x_1+2=0$, $x_2+1=0$, $x_2+2=0$.

Если $x_1+1=0$, то есть $(a+1)+1=0$, то $a=-2$. Таким образом, при $a= -2$ ,  $x_1$ - посторонний корень уравнения. (1).

Если $x_1+2=0$, то есть $(a+1)+2=0$, то $a = -3$. Таким образом, при $a = -3$, $x_1$ - посторонний корень уравнения. (1).

Если $x_2+1=0$, то есть $(a-3)+1=0$, то $a = 2$. Таким образом, при $a = 2$ $x_2$ - посторонний корень уравнения (1).

Если $x_2+2=0$, то есть $(a-3)+2=0$, то $a=1$. Таким образом, при $a = 1$, $x_2$ - посторонний корень уравнения (1).

В соответствии с этим при $a = -3$ получаем $x = -3-3 = -6$;

при $a = -2$  $x = -2-3 = -5$;

при $a = 1$  $x = 1+1 = 2$;

при $a = 2$  $x = 2+1 = 3$.

Можно записать ответ.

<u>Ответ:</u> 1) если $a= -3$, то $x= -6$; 2) если $a= -2$, то $x= -5$; 3) если $a= 0$, то корней нет; 4) если $a= 1$, то $x= 2$; 5) если $a=2$, то $x=3$; 6) если $a \neq -3$, $a \neq -2$, $a \neq 0$, $a \neq 1$, $a \neq 2$, *то* $x_1 = a+1$, $x_2 = a-3$.

## §4. Иррациональные уравнения и неравенства

Уравнения и неравенства, в которых переменная содержится под знаком корня, называется *иррациональным.*

Решение иррациональных уравнений сводится к переходу от иррационального к рациональному уравнению путем возведения в степень обеих частей уравнения или замены переменной. При возведении обеих частей уравнения в четную степень возможно появление посторонних корней. Поэтому при использовании указанного метода следует проверить все найденные корни подстановкой в исходное уравнение, учитывая при этом изменения значений параметра.

Уравнение вида $\sqrt{f(x)}$ =g(x) равносильно системе $\begin{cases} f(x) = g^2(x) \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$

Неравенство f(x) ≥ 0 следует из уравнения f(x) = $g^2$(x).

При решении иррациональных неравенств будем использовать следующие равносильные преобразования:

$$\sqrt{f(x)} \le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \le g^2(x) \\ f(x) \ge 0 \\ g(x) \ge 0, \end{cases} \qquad \sqrt{f(x)} \ge g(x) \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge g^2(x) \\ g(x) \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) \prec 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

**Пример 1.** Решите уравнение $\sqrt{x^2 + ax - 2a} = x + 1$ *(3)*

Это иррациональное уравнение

Решение: По определению арифметического корня уравнение (3) равносильно системе $\begin{cases} (a-2)x = 2a+1 \\ x+1 \ge 0 \end{cases}$.

При $a = 2$ первое уравнение системы имеет вид $0\,x = 5$, то есть не имеет решений.

При $a \ne 2$ $x = \dfrac{2a+1}{a-2}$. Выясним, при каких значениях $a$ найденное значение $x$ удовлетворяет неравенству $x \ge -1$: $\dfrac{2a+1}{a-2} \ge -1$, $\dfrac{3a-1}{a-2} \ge 0$,

откуда $a \le \dfrac{1}{3}$ или $a > 2$.

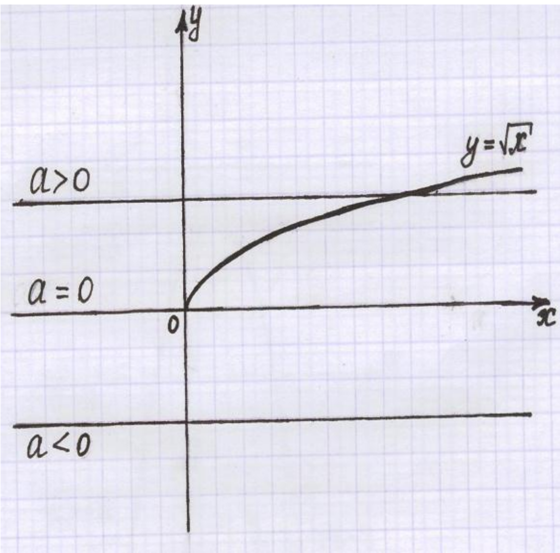
Ответ: При $a \le \dfrac{1}{3}$, $a > 2$ $x = \dfrac{2a+1}{a-2}$, при $\dfrac{1}{3} < a \le 2$ уравнение решений не имеет.

**Пример 2.** Решить уравнение $\sqrt{x} = a$ (приложение 4)

Решение. $y = \sqrt{x}$

$y = a$ – семейство горизонтальных прямых.

Построим графики функций.




<u>Ответ</u>: при $a<0$ –решений нет;

при $a\geq 0$ – одно решение.

**<u>Пример 3</u>**. Решим неравенство $(a+1)\sqrt{2-\tilde{o}}<1$.

<u>Решение.</u> О.Д.З. $x \leq 2$. Если $a+1 \leq 0$, то неравенство выполняется при всех допустимых значениях $x$. Если же $a+1>0$, то

$$(a+1)\sqrt{2-\tilde{o}}<1. \Leftrightarrow \sqrt{2-\tilde{o}}<\frac{1}{a+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x \prec \dfrac{1}{(a+1)^2} \\ 2-x \geq 0, \end{cases}$$

откуда $x \in (2-\dfrac{1}{(a+1)^2};\ 2\ ]$

<u>Ответ.</u> $x \in (-\infty;2\ ]$ при $a \in (-\infty;-1\ ]$, $x \in (2-\dfrac{1}{(a+1)^2};\ 2\ ]$

при $a \in (-1;+\infty)$.

## § 5. Тригонометрические уравнения и неравенства.

Приведем формулы решений простейших тригонометрических уравнений:

$Sinx = a \Leftrightarrow x= (-1)^n \arcsin a+\pi n,\ n \in Z,\ |\grave{a}|\leq 1,$ (1)

$Cos\ x = a \Leftrightarrow x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ ,\ n \in Z,\ |\grave{a}|\leq 1.$ (2)

Если $|\grave{a}|>1$, то уравнения (1) и (2) решений не имеют .

*tg x = a* $\Leftrightarrow x = arctg\ a + \pi n,\ n \in Z,\ a \in R$

*ctg x = a* $\Leftrightarrow x = arcctg\ a + \pi n,\ n \in Z,\ a \in R$

Для каждого стандартного неравенства укажем множество решений:

1. $\sin x > a \Leftrightarrow \arcsin a + 2\pi n < x < \pi - \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z,$

при $a < -1,\ x \in R;$ при $a \ge 1,$ решений нет.

2. . $\sin x < a \Leftrightarrow \pi - \arcsin a + 2\pi n < x < 2\pi + \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z,$

при $a \le -1$, решений нет; при $a > 1,\ x \in R$

3. $\cos x > a \Leftrightarrow -\arccos a + 2\pi n < x < \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z,$

при $a < -1,\ x \in R$ ; при $a \ge 1$, решений нет.

4. $\cos x < a \Leftrightarrow \arccos a + 2\pi n < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z,$

при $a \le -1$, решений нет ; при $a > 1,\ x \in R$

5. $tg\ x > a,\ arctg\ a + \pi n < x < \pi/2 + \pi n,\ n \in Z$

6. $tg\ x < a,\ -\pi/2 + \pi n < x < arctg\ a + \pi n,\ n \in Z$

<u>**Пример1.**</u> Найти *a*, при которых данное уравнение имеет решение:

$Cos^2 x + 2(a-2)\cos x + a^2 - 4a - 5 = 0.$

<u>Решение.</u> Запишем уравнение в виде

$\cos^2 x + (2a-4)\cos x + (a-5)(a+1) = 0,$ решая его как квадратное, получаем $\cos x = 5 - a$ и $\cos x = -a-1.$

Уравнение $\cos x = 5-a$ имеет решения при условии $-1 \le 5-a \le 1 \Leftrightarrow 4 \le a \le 6$, а уравнение $\cos x = -a-1$ при условии $-1 \le -1-a \le 1 \Leftrightarrow -2 \le a \le 0$.

<u>Ответ.</u> $a \in [-2; 0] \cup [4; 6]$

<u>**Пример 2.**</u> При каких b найдется a такое, что неравенство $\frac{a}{\sin x} + b > 0$ выполняется при всех $x \ne \pi n,\ n \in Z.$

<u>Решение.</u> Положим $a = 0$. Неравенство выполняется при $b > 0$. Покажем теперь, что ни одно $b \le 0$ не удовлетворяет условиям задачи. Действительно, достаточно положить $x = \pi/2$, если $a < 0$, и $x = -\pi/2$ при $a \ge 0$.

<u>Ответ.</u> $b > 0$

## § 6. Показательные уравнения и неравенства

1. Уравнение $h(x)^{f(x)} = h(x)^{g(x)}$ при $h(x) > 0$ равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} h(x)=1 \\ x \in D(f)\cap D(g) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} f(x)=g(x) \\ h(x)\succ 0, h(x)\neq 1 \end{cases}$$

2. В частном случае ($h(x)= a$) уравнение $a^{f(x)}= a^{g(x)}$ при $a > 0$, равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} a=1 \\ x \in D(f)\cap D(g) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} f(x)=g(x) \\ a\succ 0, a\neq 1 \end{cases}$$

3. Уравнение $a^{f(x)}= b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $b>0$, равносильно уравнению $f(x)= \log_a b$. Случай $a =1$ рассматриваем отдельно.

Решение простейших показательных неравенств основано на свойстве степени. Неравенство вида $f(a^x) > 0$ при помощи замены переменной $t= a^x$ сводится к решению системы неравенств $\begin{cases} f(t)>0 \\ t>0, \end{cases}$ а затем к решению соответствующих простейших показательных неравенств.

При решении нестрого неравенства необходимо к множеству решений строгого неравенства присоединить корни соответствующего уравнения. Как и при решении уравнений во всех примерах, содержащих выражение $a^{f(x)}$, предполагаем $a > 0$. Случай $a = 1$ рассматриваем отдельно.

**<u>Пример 1</u>.** При каких $a$ уравнение $8^x= \dfrac{3a-2}{4-a}$ имеет только положительные корни?

<u>Решение.</u> По свойству показательной функции с основанием, большим единицы, имеем $x>0 \Leftrightarrow 8^x >1 \Leftrightarrow \dfrac{3a-2}{4-a} >1 \Leftrightarrow \dfrac{4a-6}{4-a} >0$, откуда $a \in (1{,}5;4)$.

<u>Ответ.</u> $a \in (1{,}5;4)$.

**<u>Пример 2.</u>** Решить неравенство $a^2 \cdot 2^x > a$

<u>Решение</u>. Рассмотрим три случая:

1. $a < 0$. Так как левая часть неравенства положительна, а правая отрицательна, то неравенство выполняется для любых $x \in R$.

2. $a = 0$. Решений нет.

3. $a > 0$. $a^2 \cdot 2^x > a \Leftrightarrow 2^x > \frac{1}{a} \Leftrightarrow x > -\log_2 a$

Ответ. $x \in R$ при $a > 0$; решений нет при $a = 0$; $x \in (-\log_2 a; +\infty)$ при $a > 0$.

## § 7. Логарифмические уравнения и неравенства

Приведем некоторые эквивалентности, используемые при решении [ логарифмических уравнений и неравенств.

1. Уравнение $\log_{f(x)} g(x) = \log_{f(x)} h(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} g(x) = h(x) \\ f(x) > 0, f(x) \neq 1, g(x) > 0. \end{cases}$$

В частности, если $a > 0$, $a \neq 1$, то

$$\log_a g(x) = \log_a h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = h(x) \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

2. Уравнение $\log_a g(x) = b \Leftrightarrow g(x) = a^b$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $g(x) > 0$).

3. Неравенство $\log_{f(x)} g(x) \leq \log_{f(x)} h(x)$ равносильно совокупности двух систем: $\begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ h(x) > 0 \\ h(x) \leq g(x) \end{cases}$ и $\begin{cases} f(x) > 1 \\ g(x) > 0 \\ g(x) \leq h(x). \end{cases}$

Если a, b – числа, a >0, a ≠1, то

$$\log_a f(x) \leq b \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} f(x) \geq a^b, \text{åñëè} \, 0 < a < 1 \\ 0 < f(x) \leq a^b, \text{åñëè} \, a > 1 \end{array} \right.$$

$$\log_a f(x) > b \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} 0 < f(x) < a^b, \text{åñëè} \, 0 < a < 1 \\ f(x) > a^b, \text{åñëè} \, a > 1 \end{array} \right.$$

**Пример 1.** Решите уравнение $\frac{\log_a^2 x - 2}{4 - \log_a x} = 1$

Решение. Найдем ОДЗ: $x > 0$, $x \neq a^4$, $a > 0$, $a \neq 1$. Преобразуем уравнение

$\log_a^2 x - 2 = 4 - \log_a x \Leftrightarrow \log_a^2 x + \log_a x - 6 = 0$, откуда $\log_a x = -3 \Leftrightarrow$

x = $a^{-3}$ и $\log_a x = 2 \Leftrightarrow x = a^2$. Условие $x = a^4 \Leftrightarrow a^{-3} = a^4$ или $a^2 = a^4$ не выполняется на ОДЗ.

Ответ: $x = a^{-3}$, $x = a^2$ при $a \in (0; 1) \bigcup (1; \infty)$.

**Пример 2.** Найдите наибольшее значение $a$, при котором уравнение

$2\log_2^2 \tilde{o}$ - $|\log_2 x|$ + $a = 0$ имеет решения.

Решение. Выполним замену $|\log_2 x|$ = t и получим квадратное уравнение $2t^2 - t + a = 0$. Решая, найдем D = 1-8$a$ . Рассмотрим D≥0, 1-8$a \geq 0 \Rightarrow a \leq \frac{1}{8}$.

При $a = \frac{1}{8}$ квадратное уравнение имеет корень t= $\frac{1}{4}$ >0.

Ответ. $a = \frac{1}{8}$

**Пример 3.** Решить неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x + a) > -3$

Решение. Решим систему неравенств $\begin{cases} \tilde{o}^2 - 2\tilde{o} + \grave{a} > 0 \\ \tilde{o}^2 - 2\tilde{o} + \grave{a} < 8. \end{cases}$

Корни квадратных трехчленов $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-\grave{a}}$ и $x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{9-\grave{a}}$ .

Критические значения параметра : $a = 1$ и $a = 9$.

Пусть $X_1$ и $X_2$ – множества решений первого и второго неравенств, тогда

$X_1 \bigcap X_2 = X$ – решение исходного неравенства.

При 0< $a$ <1 $X_1 = (-\infty; 1 - \sqrt{1-\grave{a}}) \bigcup (1 + \sqrt{1-\grave{a}}; +\infty)$, при $a > 1$ $X_1 = (-\infty; +\infty)$.

При $0 < a < 9$ $X_2 = (1 - \sqrt{9-\grave{a}}; 1 + \sqrt{9-\grave{a}})$, при $a \geq 9$ $X_2$ – решений нет.

Рассмотрим три случая:

1. $0 < a \leq 1$ $X = (1 - \sqrt{9-\grave{a}}; 1 - \sqrt{1-\grave{a}}) \bigcup (1 + \sqrt{1-\grave{a}}; 1 + \sqrt{9-\grave{a}})$.

2. $1 < a < 9$ $X = (1 - \sqrt{9-\grave{a}}; 1 + \sqrt{9-\grave{a}})$.

3. $a \geq 9$ X – решений нет.

# ***<u>Задачи ЕГЭ</u>***

## Высокий уровень

**<u>Пример 1.</u>** Найдите все значения $p$, при которых уравнение

$p \cdot \mathrm{ctg}^2x + 2\sin x + p = 3$ имеет хотя бы один корень.

<u>Решение.</u> Преобразуем уравнение

$$p \cdot \left( \frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) + 2\sin x + p = 3,\ \ \sin x = t,\ \ t \in [-1;1],\ t \neq 0.$$

$\frac{ð}{t^2} - p + 2\,t + p = 3$, $\frac{ð}{t^2} + 2\,t = 3$, $3 - 2t = \frac{ð}{t^2}$, $3t^2 - 2t^3 = p$.

Пусть $f(y) = 3t^2 - 2t^3$. Найдем множество значений функции $f(x)$ на $[-1;0) \bigcup (0;1]$.

$y' = 6t - 6t^2$, $6t - 6t^2 = 0$, $t_1 = 0$, $t_2 = 1$. $f(-1) = 5$, $f(1) = 1$.

При $t \in [-1;0)$, $E(f) = (0;5]$,

При $t \in (0;1]$, $E(f) = (0;1]$, то есть при $t \in [-1;0) \bigcup (0;1]$, $E(f) = (0;5]$.

Чтобы уравнение $3t^2 - 2t^3 = p$ ( следовательно, и данное) имело хотя бы один корень необходимо и достаточно $p \in E(f)$, то есть $p \in (0;5]$.

<u>Ответ.</u> $(0;5]$.

**<u>Пример 2.</u>**

При каких значениях параметра $a$ уравнение $\log_{õ^2+2}(4x^2 - 4a + a^2 + 7) = 2$ имеет ровно один корень?

<u>Решение.</u> Преобразуем уравнение в равносильное данному:

$$4x^2 - 4a + a^2 + 7 = (x^2 + 2)^2 .$$

Отметим, что если некоторое число x является корнем полученного уравнения, то число – x также является корнем этого уравнения. По условию это не выполнимо, поэтому единственным корнем является число 0.

Найдем $a$.

$4 \cdot 0^2 - 4a + a^2 + 7 = (0^2 + 2)^2$,

$a^2 - 4a + 7 = 4$, $a^2 - 4a + 3 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$.

*Проверка.*

1) $a_1 = 1$. Тогда уравнение имеет вид: $\log_{\tilde{o}^2+2}(4x^2+4) = 2$. Решаем его

$4x^2 + 4 = (x^2 + 2)^2$, $4x^2 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4$, $x^4 = 0$, $x = 0$ – единственный корень.

2) $a_2 = 3$. Уравнение имеет вид: $\log_{\tilde{o}^2+2}(4x^2+4) = 2 \Rightarrow x = 0$ – единственный корень.

Ответ. 1; 3

**Пример 3.** Найдите все значения *p,* при которых уравнение $x^2 - (p + 3)x + 1 = 0$ имеет целые корни и эти корни являются решениями неравенства: $x^3 - 7px^2 + 2x^2 - 14px - 3x + 21p \le 0$.

Решение. Пусть $x_1$, $x_2$ – целые корни уравнения $x^2 - (p + 3)x + 1 = 0$. Тогда по формуле Виета справедливы равенства $x_1 + x_2 = p + 3$, $x_1 \cdot x_2 = 1$. Произведение двух целых чисел $x_1$, $x_2$ может равняться единице только в двух случаях: $x_1 = x_2 = 1$ или $x_1 = x_2 = -1$. Если $x_1 = x_2 = 1$, то $p + 3 = 1+1 = 2 \Rightarrow p = -1$; если $x_1 = x_2 = -1$, то $p + 3 = -1 - 1 = -2 \Rightarrow p = -5$. Проверим являются ли корни уравнения $x^2 - (p + 3)x + 1 = 0$ в описанных случаях решениями данного неравенства. Для случая $p = -1$, $x_1 = x_2 = 1$ имеем

$1^3 - 7 \cdot (-1) \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2 - 14 \cdot (-1) \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 21 \cdot (-1) = 0 \le 0$ – верно; для случая $p = -5$, $x_1 = x_2 = -1$ имеем $(-1)^3 - 7 \cdot (-5) \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1)^2 - 14 \cdot (-5) \times (-1) - 3 \cdot (-1) + 21 \cdot (-5) = -136 \le 0$ – верно. Итак, условию задачи удовлетворяют только $p = -1$ и $p = -5$.

Ответ. $p_1 = -1$ и $p_2 = -5$.

**Пример 4.** Найдите все положительные значения параметра *a*, при которых число 1 принадлежит области определения функции

$y = (a^{2+5ax} - a^{a^2x+6x})^{\frac{1}{2}}$.

Решение. $y = (a^{2+5ax} - a^{a^2x+6x})^{\frac{1}{2}}$. Область определения данной функции составляют все значения x, для которых $a^{2+5ax} - a^{a^2x+6x} \ge 0$.

Если значения $x = 1$ принадлежит области определения, то должно выполняться неравенство $a^{2+5\grave{a}} - a^{\grave{a}^2+6} \ge 0$, $a^{2+5\grave{a}} \ge a^{\grave{a}^2+6}$ (1)

Таким образом, необходимо найти все $a > 0$, удовлетворяющие неравенству (1).

1) $a = 1$ удовлетворяет неравенству (1).

2) При $a > 1$ неравенство (1) равносильно неравенству $2 + 5a \geq a^2 + 6$,
$a^2 - 5a + 4 \leq 0$. Решение этого неравенства: $1 \leq a \leq 4$. Учитывая условие $a > 1$, получим $1 < a \leq 4$.

3) При $0 < a < 1$ неравенство (1) равносильно неравенству $2 + 5a \leq a^2 + 6$,
$a^2 - 5a + 4 \geq 0$. Его решение $a \leq 1$; $a \geq 4$ с учетом условия $0 < a < 1$ можно записать так: $0 < a < 1$. Объединяя результаты, получаем $0 < a \leq 4$.

Ответ. ( 0; 4 ]

## Задания для самостоятельной работы

### *§1. Линейные уравнения и неравенства*

*1.Решить уравнения:*

а) $a x = -4$

б) $2 - 5x = a x - 2$

в) $2x + 3 = a x$

г) $a x - 2x = 3(x - 1)$

д) $a x = x + 3$

е) $4 + a x = 3x + 1$

*2.Решить неравенства:*

а) $a x > 5$

б) $a x - 2x < 3(x + 1)$

в) $a^2 x + 3 \geq a + 3 a x$

г) $(n - 1) x \leq 2 (n + x$

д) $a > \frac{1}{a} + \frac{x-1}{a-1}$

*3.При каких значениях параметра а уравнения*

*а)* $|x| = a x - 2$

*б)* $(a^2 - a - 2)x \leq a^5 - 4a^4 + 4a^3$

*не имеют решений?*

*4.При каких значениях параметра р все решения неравенства* $(p - 3)x > 5$

*являются решениями неравенства* $px > 2$ *?*

*5.При каких значениях параметра а корень уравнения*

$\frac{2(a+1)x}{a} = \frac{7}{a} + 3(x+1)$ *не меньше корня уравнения*

$5(x - 2) - 4(3 + x) = 2 + a x$ *?*

*6. Определить количество корней в зависимости от значений*

*параметра а: а)* $a x - 6 = 2 a - 3 x$

б) $2 a x - 4 x - a^2 + 4 a - 4 = 0$

## *§2 Квадратные уравнения и неравенства*

1. *Решить уравнения:*

*а)* $x^2 - 5 x + 6 = a$

*б)* $x^2 - 2 |x| - a = 0$

*в)* $x^2 + 5 a x + 4 a^2 = 0$

*г)* $x^2 - (2 a - 4) x - 8 a = 0$

*д)* $x^2 - (3 a - 2) x + 2 a^2 - a - 3 = 0$

*е)* $ax^2 - (a + 1) x + 1 = 0$

*ж)* $(a + 1) x^2 - 2 x + 1 - a = 0$

*з)* $a b x^2 + (a^2 + b^2) x + ab = 0$

2. *Решить неравенства:*

*а)* $x^2 + 2x > a + 3$

*б)* $x^2 - cx - 2c^2 < 0$

*в)* $x^2 - 3ax + 2a^2 \leq 0$

*г)* $x^2 - (3b - 2) - 6b \leq 0$

*д)* $ax^2 - 2(a - 1)x - 4 \geq 0$

*е)* $x^2 - 2x - 8 - a > 0$

*ж)* $x^2 - 12x + c < 0$

3. При каких а разность корней уравнения $2x^2 - (a + 1)x + (a - 1) = 0$ равна их произведению?

4. При каком а уравнения $x^2 + 2x + a = 0$ и $x^2 + ax + 2 = 0$ имеют общий корень?

5. При каких а существует хотя бы одно общее решение неравенств $x^2 + 4ax + 3a^2 - 2a - 1 > 0$ и $x^2 + 2ax - 3a^2 + 8a - 4 \leq 0$ ?

### *§3. Дробно – рациональные уравнения и неравенства*

1. *Решить уравнения:*

*а)* $\frac{x-a}{x+2} = 0$

*б)* $\frac{x-2}{x+a} = 0$

*в)* $\frac{x-a}{x^2-4x+3} = 0$

*г)* $\frac{x^2-4x+3}{x-3} = 0$

*д)* $\frac{x+a}{x+1} + \frac{a-3x}{x-3} = 2$

*е)* $\frac{x}{a(x+1)} - \frac{2}{x+2} = \frac{3-a^2}{a(x+1)(x+2)}$

2. *При каких значениях параметра уравнения имеют бесконечно много решений*

*а)* $\frac{x^2+(3-a)x-3a}{x^2-x-12} = 0$

*б)* $\frac{x^2-(3b-1)x+2b^2-2b}{x^2-7b+6} = 0$

*3. Решить неравенства:*

*а)* $\frac{x+2a}{x+a} < 0$

*б)* $\frac{a(x-2)}{x-a} \le 0$

*в)* $\frac{x^2-(a+1)x+2a-2}{3x^2-7x+2} > 0$

*г)* $\frac{a-1}{x+6} \ge \frac{2x+7}{(x+2)^2-x-22}$

*4. При каких а неравенство* $\frac{4x-a}{x-2a} < 0$ *выполняется для всех* $x \in [2;4]$ *?*

## *§4. Иррациональные уравнения и неравенства*

1. *Решить уравнения:*

*а)* $\sqrt{x} = a$

*б)* $a\sqrt{x} = 4$

*в)* $\sqrt{x-1} = a$

*г)* $\sqrt{x} = a - 2$

д)$x$ - $\sqrt{a-x^2}$ = 1

е) $\sqrt{x}$ + $\sqrt{x+a}$ = 0

д) $\sqrt{x-1}$ +$a^2$ $\sqrt{x}$ = 0

е) $a^2$ $\sqrt{x-1}$ + $\sqrt{x}$ = 0

ж) $a^2\sqrt{x-3}$ + $|x|$ = 0

2. Решить неравенства:

а) $x < \sqrt{a-x^2}$

б) $\sqrt{x-3} \geq a$

в) $\sqrt{x}$ > - $a$

г) $a\sqrt{x} \leq 0$

д) $x$ - $\sqrt{a-x}$ < 0

е) $\sqrt{(x+6)(x+1)} \leq 6+a$

3. При каких значениях параметра а неравенство

$\sqrt{x^2+8x+20} \leq \frac{2a^2-4a-3}{a^2-2a-8}$ не имеет решений?

4. При каких а неравенство

$\sqrt{x^2-10x+26} \geq \frac{a^2+2a-3}{a^2+2a-8}$ выполняется для всех значений х ?

## §5. Тригонометрические уравнения и неравенства

1 .Решить уравнения:

а) $\sin(2x + 3) = a + 4$

б) $2\cos(x + \pi/3) = a^2-3a$

в) $tg^2 2x - (2a + 1)tg2x + a(a + 1) = 0$

*2. Решить неравенства:*

*а)* $\cos x \le 2 - a^2$

*б)* $(a - 2)\sin x > 3a + 4$

*в)* $(2\cos x - a)(3\cos x + в) < 0, (0<a<2, 0<в<3)$

*3. Найдите целые а, при которых имеют решения уравнения:*

*а)* $1 + a\cos x = (a + 1)^2$

*б)* $\sin^2 x - 3\sin x + a = 0$

*в)* $a\sin x + 2\sqrt{a+1}\cos x = 2a + 1$

*4. Доказать, что для любых* $p \in R$ *и* $t \in R$ *справедливо неравенство*

$4(p - 3)^4 + 2 + (2 - 4(p - 3)^4)\cos t \ge 0$. *Найти все пары чисел (p;t), для которых это неравенство обращается в равенство.*

## §6. Показательные уравнения и неравенства

*1. При каких а уравнение имеет единственное решение?*

*А)* $5^{2x} - 10^x + 4^{x-1}(a - 2) = 0$

*б)* $25^x - 2 \cdot 10^x + (2a + 3) \cdot 4^x = 0$

*в)* $4^x - a \cdot 2^{x+1} - 3a^2 + 4a = 0$

*г)* $a \cdot 3^x + 4 \cdot 3^{-x} = 2$

*д)* $2^{2x} - a \cdot 2^x - 2a = 0$

*е)* $3^{(a + 1)x^2 - 2(a - 2)x + a} = 27$

*2.Решить неравенства:*

*а)* $a \cdot 2^x \le a^2$

*б)* $a^{x^2 - 15} > a^{2x}$

*в)* $4^{x+1}a^2 - 65 \cdot 2^x a + 16 > 0$

*г)* $\dfrac{a^x}{a^x - 1} > \dfrac{1 + a^x}{1 - 2a^{-x}}$

*3. При каких а неравенство* $4^x + (a - 1)2^x + (2a - 5) > 0$ *выполняется при любом* $x \in R$ *?*

*4. При каких а неравенство* $36^x + a \cdot 6^x + a + 8 \le 0$ *имеет хотя бы одно решение?*

## § 7. Логарифмические уравнения и неравенства

*1.Решите уравнение*

*а)* $\log_{2x}(ax+1) = \frac{1}{2}$

*б)* $\log_a \sqrt{1+õ} + 3\log_{à^2}(1 - x) = \log_{à^4}(1 - x^2)^2 + 2$

*в)* $\log_3 2a + \log_3 x(a - 2) = \log_3(a-2)$

*г)* $\log_{\sqrt{2-÷}} \sqrt{2õ+à} = 2$

*д)* $2\log_x a + \log_{ax} a + 3\log_{à^2õ} a = 0$

*2.При каких а уравнение* $\log_{\sqrt{2-õ}}(4x+a) = 4$ *имеют решения.*

*3. При каких а корни уравнения*

$(a-1)\log_3^2(x-2) - 2(a+1)\log_3(x-2) + a - 3 = 0$ *меньше 3?*

*4. При каких а расстояние между корнями уравнения*

$2\log_à x + 3\log_{àõ^2} a + 5 = 0$ *меньше* $\frac{6}{25}$ *?*

*5. Решите неравенства*

*а)* $\log_x(a^2+1) < 0$

*б)* $(\log_2 x - 1)((\log_2 x + a) > 0$

*в)* $\log_a x + 1 > 2\log_x a$

*г)* $\log_a \sqrt{3{,}5õ - 1{,}5} \cdot \log_x a < 1$

*6. Решите неравенство* $\log_a(x^2+x+2) < \log_a(2x^2 - 18)$*,если известно, что оно удовлетворяется при* $x = -3{,}5$.

*7. При каких значениях a неравенство $\log_2(x^2+ax+1) > -1$ выполняется для любого $x<0$?*

***<u>Задачи ЕГЭ.</u>***

## ***Высокий уровень***

*1) При каких значениях параметра m уравнение $mx^{-2} + 2 = 3m - 2x^{-2}$*

*не имеет корней?*

*2) Найдите наибольшее целое отрицательное t, при котором уравнение $\cos^2 x - 5t = 4 - 2t\cdot\cos^2 x$ не имеет корней.*

*3) При каких значениях параметра a прямая $y = 3a - 2a^2$ не имеет общих точек с графиком функции $y = \sin^2 x + a\cos x$?*

*4) Найдите все значения параметра b, при которых множество решений неравенства $b\log_3 x + \log_{3x} + b \geq 0$ содержит все степени двойки с целым отрицательным показателем.*

*5) Найдите все значения параметра p, такие, что уравнение*

*$x^2 - (p-5)x - 2 = 0$ имеет целые корни и эти корни являются решениями неравенства $x^3 - 0{,}5px^2 - 4x^2 + 2px - 5x + 2{,}5p \geq 0$.*

*6) Определите, при каких значениях параметра a уравнение $x^4 + (x+1)((3a-1)x^2 + (2a^2-2)(x+1)) = 0$ имеет четыре различных действительных корня, каждый из которых принадлежит отрезку $[-3;0]$.*

*7) Найдите все значения параметра a, при которых оба числа $\frac{4à+1}{à}$ и $3\sqrt{à-1}$ являются решениями неравенства $\frac{3-4\cos^2 x}{2\sin x - 1} \leq 0$.*

*Ответы: 1) $\left[-2;\frac{2}{3}\right]$; 2) $-2$; 3) $(-\infty;0)\bigcup(2;+\infty)$; 4) нет решений; 5) 6;*

*6) $(3; 3{,}25]$; 7) $\left[1+(\frac{7\pi}{30})^2;\frac{6}{7\pi-18}\right]$.*

## Литература

### Для студентов

*1. Алимов Ш.А. и др*. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа (базовый и углубленный уровни).10—11 классы. — М., 2014.

*2. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др*. Математика: алгебра и начала математического анализа. Геометрия. Геометрия (базовый и углубленный уровни). 10—11 классы. — М., 2014.

*4.Башмаков М.И.* Математика. Сборник задач профильной направленности: учеб. пособие для студ. учреждений сред. проф. образования. — М., 2014.

***Дополнительные источники:***

1. Колмогоров А.Н. и др. Алгебра и начала математического анализа: учебник для 10 – 11 кл. общеобразоват. учрежд., 17 изд., – М.: Просвещение, 2008.
2. Математика. 11 класс: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений (базовый уровень) / [А. Г. Мордкович, И. М. Смирнова, П. В. Семенов и др.]; под ред. А. Г. Мордковича, И. М. Смирновой. – 5-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2010.
3. Мордкович А. Г. Алгебра и начала анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч 1: учебник для общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – 4-е изд., доп. – М.: Мнемозина, 2007.