**ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ**

**ПОГРЕШНОСТЕЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ**

1. Классификация погрешностей геодезических измерений.

Свойства случайных погрешностей.

1. Принцип арифметической середины
2. Средняя квадратическая погрешность одного измерения.

Формулы Гаусса и Бесселя

1. Закон нормального распределения погрешностей.

Предельная погрешность

1. Средняя квадратическая погрешность функции

измерения величин

1. Двойные измерения и оценка их точности
2. Неравноточные измерения
3. Понятия об уравнивании геодезических измерений
4. **Классификация погрешностей геодезических измерений.**

**Свойства случайных погрешностей.**

Любые измерения сопровождаются неизбежными погрешностями.

Результаты геодезических измерений могут иметь погрешности трех видов:

грубые, систематические и случайные.

Грубые погрешности получаются в результате просчетов и промахов

при измерениях. Например, вместо правильного результата по мерной ленте

11 м при измерении остатка ошибочно можно отсчитать расстояние 9 м,

если лента уложена в обратном направлении.

Грубые погрешности обнаруживаются повторными измерениями. Поэтому контрольные измерения являются необходимыми для исключения грубых погрешностей.

Систематические погрешности имеют объективный характер и при измерениях их можно учесть путем введения поправок в результаты

измерений.

Источником систематических погрешностей являются неисправности в применяемых геодезических приборах и инструментах, их неточная установка при измерениях, влияние внешних факторов и т. д.

Например, если при номинальной длине ленты в 20 м из результатов

компарирования оказалось, что ее длина равна 20,03 м. Тогда при

измерении этой лентой расстояния в 100 м мы допустим погрешность в 0,03× 5 = 0,15 м. Поэтому в результат измерения необходимо ввести поправку за компарирование ленты.

Случайными погрешностями называют такие погрешности, размер и

характер влияния которых на каждый отдельный результат измерения

остается неизвестным. Величину и знак случайных погрешностей заранее

установить нельзя. Они неизбежны и сопровождают каждое измерение, так

как измерение мы проводим только с такой точностью, которую можно достичь применяемыми при этом приборами.

Избавить результаты измерений от случайных погрешностей полностью нельзя. Но на основании изучения их свойств можно вывести правила, как из ряда измерений получить наиболее надежные результаты и оценивать их точность. Этими вопросами занимается теория погрешностей измерений.

В теории погрешностей различают равноточные и неравноточные

измерения.

Равноточными называют измерения, выполненные в

одинаковых условиях, приборами одинаковой точности, одинаковое число

раз, наблюдателями одинаковой квалификации. Если одно из этих условий

не соблюдается, то такие измерения будут неравноточными.

**Свойства случайных погрешностей**. Случайные погрешности можно

определить как разность между измеренными и истинными значениями

одной и той же величины. На основании теоретического и практического

изучения многих рядов случайных погрешностей выведены их общие

свойства:

1 При данных условиях случайные погрешности не могут превышать

определенного предела.

2 Одинаковые по абсолютной величине положительные и

отрицательные погрешности равновозможны.

3 Меньшие по абсолютной величине погрешности встречаются чаще,

чем большие.

4 Среднее арифметическое из случайных погрешностей равноточных

измерений одной и той же величины имеет тенденцию стремится к нулю

при неограниченном увеличении числа измерений.

2. **Принцип арифметической середины**

Пусть произведены равноточные измерения l1, l2, … , ln одной и той же

величины, истинное значение которой Х. Тогда можно вычислить n

значений случайных погрешностей:



Складывая левые и правые части этих равенств, получим



В теории погрешности принято обозначать сумму величин через

квадратные скобки, например:



При этих обозначениях равенство примет вид



Согласно четвертому свойству случайных погрешностей величина [Δ] / n

в равенстве при неограниченном возрастании числа измерений

стремится к нулю. Следовательно, величина [l] / n при этих условиях будет

приближаться к истинному значению Х.

На основании этого арифметическую середину (среднее арифметическое

Из результатов измерений) принято считать наиболее надежным или вероятнейшим результатом из равноточных измерений одной и той же величины при любом числе измерений.



3. **Средняя квадратическая погрешность одного измерения.**

**Формулы Гаусса и Бесселя**

В теории погрешностей точность измерений характеризуется средней

Квадратической погрешностью, которая была введена знаменитым

немецким математиком и геодезистом К. Ф. Гауссом (1777–1855 гг.) и

обозначается через m:



n – число измерений.

 Эта Формула применена для вычисления средней квадратической

погрешности, когда известно истинное значение измеряемой величины. Эти

случаи в практике весьма редки. Как правило, истинное значение

измеряемой величины неизвестно, но из измерений можно получить

наиболее надежный результат – арифметическую середину. Получим

формулу для вычисления средней квадратической погрешности при

помощи уклонения отдельных результатов от арифметической середины по

так называемым вероятнейшим погрешностям V.

Пусть l1, l2, …, ln – результаты равноточных измерений одной и той же

величины, истинное значение которой Х, а арифметическая середина – L.

Тогда можно вычислить n случайных или истинных погрешностей



и n вероятнейших погрешностей





Но, согласно равенству 



т. е. сумма вероятнейших погрешностей всегда должна быть равна нулю.

Вычитая из равенства равенство , получим



В правой части равенству мы имеем случайную погрешность

арифметической середины. Обозначим ее через ε. Тогда

Возведем в квадрат равенство, возьмем их сумму и разделим ее на n:



Левая часть этого равенства есть не что иное как m2. Последнее

слагаемое правой части ввиду равенства равно нулю.



Случайную погрешность ε заменим ее средним значением, т. е.

средней квадратической погрешностью арифметической середины. Ниже

будет доказано, что средняя квадратическая погрешность арифметической середины





Формула называется формулой Бесселя и имеет большое практическое значение. Она позволяет вычислять среднюю квадратическую погрешность по вероятнейшим уклонениям результатов измерений от арифметической средины.

Кроме средней квадратической погрешности различают еще среднюю,

вероятную и относительную погрешности.

Средней погрешностью (Θ) называют среднее арифметическое из

абсолютных значений случайных погрешностей т. е.



В теории погрешности доказывается, что при n → ∞ Θ = 0,8 m, или m = 1,25Θ. Иногда в прикладных вопросах пользуются вероятной погрешностью

r.

Вероятной погрешностью называют такое значение случайной

погрешности в одном ряду равноточных измерений, по отношению к

которой одинаково возможна погрешность как больше, так и меньше этого

значения, по абсолютной величине. Для нахождения r все погрешности

данного ряда располагают в порядке возрастания по абсолютной величине и

выбирают то значение, которое занимает среднее положение, т. е.

погрешностей меньше его столько же, сколько и больше. Вероятная

погрешность связана со средней квадратической погрешностью

соотношением r = 2/3 m = 0,67 m или m = 1,5 r.

Как видно, m > Θ и m > r, что показывает, что средняя квадратическая

погрешность лучше характеризует точность измерений, чем средняя и

вероятная погрешности.

Оценку точности таких измеренных величин, как линии, площади и

объемы часто производят с помощью **относительной погрешности**.

Относительной погрешностью называют отношение абсолютной

Погрешности к значению измеренной величины. Относительная

погрешность записывается в виде дроби, в числителе которой стоит

единица, а в знаменателе – число, показывающее какую долю измеряемой

величины должна составлять допустимая погрешность. Например, длина

стороны D = 150 м измерена с абсолютной погрешностью md = 0,05 м. Тогда

относительная погрешность результата измерения составит md / D = 0,05 м /

150 м = 1 / 3000

Величина 1 / 3000 означает, что на 3000 м расстояния может быть

допущена погрешность в 1 м. Чем больше знаменатель относительной

погрешности, тем выше точность измерений. Точность всех линейных

измерений в геодезии всегда задается относительной погрешностью,

которая приводится в соответствующих инструкциях и наставлениях по

производству данного вида геодезических работ.

4. **Закон нормального распределения погрешностей.**

**Предельная погрешность**

Из предыдущего рассмотрения свойств случайных погрешностей

следует, что о появлении отдельной погрешности заранее что–либо

определенное сказать невозможно. Однако, когда число этих погрешностей

возрастает, можно установить определенные закономерности для всей

совокупности погрешностей данного ряда измерений. Эти закономерности

можно выразить уравнением, полученным К. Ф. Гауссом. Оно имеет вид



где y – плотность распределения погрешностей;

σ – параметр уравнения, называемый стандартом, связан со средней

квадратической погрешностью соотношением 

a – параметр уравнения, называемый математическим ожиданием,

связан с арифметической срединой соотношением 

e – основание натуральных логарифмов;

Δi = li – a – случайная погрешность.

Это уравнение называется **законом нормального распределения**

**погрешностей.**

Уравнению соответствует колоколообразная кривая, называемая

кривой нормального распределения (кривая Гаусса)



Площадь под кривой, ограниченная кривой и осью абсцисс, принимают

равной единице. Часть этой площади, соответствующая какому-либо

отрезку оси абсцисс, дает, вероятность попадания случайной погрешности

в данный интервал. При li = a или Δ = 0 получаем максимальное значение

ординаты кривой \_\_

Y = 1 / σ √2π.

Из рисунка видно, что основная масса погрешностей группируется

около наиболее вероятного значения погрешности Δi = 0 (согласно

четвертому свойству случайных погрешностей, среднее арифметическое из

случайных погрешностей стремится к нулю). Это положение обосновывает

третье свойство случайных погрешностей (малые погрешности встречаются

чаще, чем большие). Второе свойство случайных погрешностей о равном

появлении положительных и отрицательных ошибок характеризуется

симметричностью кривой нормального распределения относительно оси

OY.

Теоретические исследования и практика геодезических измерений

показывают, что в промежутках от –m до +m попадает 68 % всех случайных

погрешностей, в промежуток вдвое больший (от –2m до

+2m) попадает 95 % погрешностей, а в промежуток втрое больший (от –3m

до +3m) попадает 99,73 % погрешностей. Это означает, что из 100

погрешностей измерений только 32 по абсолютной величине превзойдут

среднюю квадратическую погрешность m, 3 из 1000 погрешностей будет

превышать величину утроенной средней квадратической погрешности ±3m.

Таким образом, за пределы ±3m выходит лишь 0,27 % погрешностей

измерений. Поэтому в качестве предельной погрешности Δпред принимается

утроенная средняя квадратическая погрешность, т. е.

Δпред = 3m.

5. **Средняя квадратическая погрешность функции**

**измерения величин**

В геодезии часто нужно определить точность не только самих измеренных

величин, но и их функций. Например, горизонтальное

проложение линии является функцией наклонности расстояния и угла

наклона, площадь определяемая планиметром является функцией отсчетов по

планиметру и т. д. Поэтому важно уметь вычислять средние квадратические

погрешности функций. Рассмотрим некоторые виды функций.

**Функция суммы двух аргументов**

φ = Х + Y,

где Х и Y – независимо измеренные величины.

Допустим, что каждая из этих величин измерялась n раз и каждое из

измерений сопровождалось случайными погрешностями ΔХ и ΔY. Тогда и

функция φ, вычисленная по формуле, будет иметь погрешность 



Возведем равенство в квадрат:



Таких равенств может быть получено n. Сложив их и разделив на n,

Получим



На основании четвертого свойства случайных погрешностей величина

[ΔX ΔY] как сумма случайных погрешностей будет стремиться к нулю. Тогда

с учетом равенства будем иметь:



Если аргументов несколько, то



Если , то



т. е. средняя квадратическая погрешность суммы равноточно измеренных

величин в √n раз больше средней квадратической погрешности отдельного

измерения.

П р и м е р. Найти среднюю квадратическую погрешность суммы измеренных углов в четырехугольнике, если средняя квадратическая погрешность одного угла равна ±30''. По формуле находим

\_\_

mφ = ± 30'' √ 4 = ±60'' = 1'.

**Функция линейного вида**

φ = КХ,

где К – постоянное число;

Х – аргумент, полученный из измерений.

Если Х будет измерен со случайной погрешностью ΔХ, то функция будет

иметь случайную погрешность



Измерив аргумент n раз, можно составить n уравнений, взять

сумму их квадратов и разделить на n. После чего получим





6. **Двойные измерения и оценка их точности**

В геодезии часто используют метод двойных измерений, сущность

которого состоит в том, что одну и ту же величину измеряют дважды, а

результаты измерений обрабатывают с применением формул для истинных

погрешностей.

Пусть даны результаты двух рядов n равноточных двойных измерений:



Обозначая разности двойных измерений через d, получим:



Если бы все измерения были без погрешностей, то разность d была бы

Равна нулю. Следовательно, разность двойных измерений можно

рассматривать как истинные погрешности, поэтому средняя квадратическая

погрешность разности двойных измерений на основании формулы Гаусса

выразится так:





Формула дает выражение средней квадратической погрешности

отдельного измерения из n двойных измерений.

7. **Неравноточные измерения**

На практике часто производятся и неравноточные измерения,

которые выполнены в различных условиях или приборами различной

точности, различным числом приемов.

В этом случае уже нельзя ограничиваться простым арифметическим средним, здесь надо учитывать степень надежности каждого результата измерений.

Степень надежности результата измерения, выраженная числом,

называется **весом этого измерения**. Чем надежнее результат, тем больше его

вес. Пусть имеем ряд средних значений: L1, L2, …, Ln – одной величины,

полученных из Р1, Р2, …, Рn отдельных измерений.

Согласно формуле произведение Li Pi будет равно сумме

отдельных измерений li в данном ряду, а сумма всех измерений во всех

рядах будет равна L1P1 + L2P2 + … + Ln Pn. Число всех измерений будет

равно P1 + P2 +…+ Pn.

Отсюда по правилу арифметической средины получим среднее значение

из всех рядов измерений:

Lo = (L1P1 + L2P2 + … + LnPn) / (P1 + P2 + … +Pn) = [LP] / [P].

 Это выражение называется формулой весового среднего или общей

арифметической середины. Здесь число измерений Р1, Р2,…, Рn в каждом

ряду является весом средних результатов L1, L2, …, Ln, а сумма весов

является весом общей арифметической средины Lo. Во всех случаях, когда

известны результаты измерений и их веса, вероятнейшее значение

измеренной величины вычисляют по этой формуле.

Обозначим среднюю квадратическую погрешность одного измерения

через μ, а средние квадратические погрешности

величин L1,L2….Ln соответственно через m1, m2, …, mn. Тогда, согласно равенству, можем написать, что



Если в формуле принять Pi = 1, то μ = mi. Отсюда следует, что μ

является средней квадратической погрешностью измерения, вес которого

равен единице или так называемой средней квадратической погрешности

единицы веса.

Из формул получим:



Из равенства можно сделать вывод, что произведение всякой

величины на корень квадратный из ее веса будет иметь вес, равный

единице, что позволяет приводить неравноточные измерения к

равноточным.

Из формулы можно получить также общее математическое

выражение веса:



т. е. вес измерения обратно пропорционален квадрату его средней

квадратической погрешности. В частном случае, когда μ2 = 1,



Для вывода средней квадратической погрешности единицы веса

обозначим истинные случайные погрешности величин L1, L2, …, Ln через Δ1, Δ2, …, Δn. Тогда для ряда



истинные погрешности будут



Ряд равноточный, средние квадратические погрешности его составляющих



Для равноточных измерений погрешность μ можно получить по

формуле Гаусса:



По аналогии с формулой можем написать выражение средней

Квадратической погрешности единицы веса через вероятнейшие

погрешности Vi величины Li (уклонения величины Li от весового среднего

Lo):



Для вывода средней квадратической погрешности Мо арифметической середины Lo с весом [Р] и средней квадратической погрешности единицы веса μ



1. **Понятия об уравнивании геодезических измерений**

Геодезические измерения характерны тем, что их всегда больше, чем

Необходимо для определения величин.

Например, для решения треугольника измеряют три угла, тогда как было бы достаточно измерить два угла. Эти избыточные измерения выполняют с целью контроля и повышения точности определяемых величин. Результаты избыточных измерений вследствие погрешностей не могут точно

Удовлетворять математическим зависимостям между элементами геометрических фигур, к которым они относятся. Поэтому возникает необходимость в нахождении системы поправок к измеренным величинам, которая удовлетворяла бы геометрическим условиям. Однако таких систем может быть бесчисленное множество. Например, если сумма трех углов в треугольнике не равна 180о, то можно предложить множество вариантов введения поправок в углы.

В теории вероятности доказывается, что оптимальной (вероятнейшей)

системой поправок является та, которая определяется под условием, чтобы

сумма квадратов поправок в измеренные величины была минимальной, то

есть



где V – поправки к измеренным величинам.

Способ нахождения вероятнейших значения измеренных величин при

наличии избыточных измерений под условием называется методом

**наименьших квадратов**.

Совокупность вычисленных работ по нахождению наиболее надежных (вероятнейших) результатов по методу наименьших квадратов называется уравниванием. Уравнивание имеет две цели:

1) найти наиболее надежное значение неизвестных с оценкой точности

полученных результатов;

2) исключить все математические противоречия в зависимостях,

существующих между измеряемыми величинами.

В качестве примера применения метода наименьших квадратов

покажем, что арифметическая середина является вероятнейшим значением

измеряемой величины в равноточных измерениях.

Запишем условие в виде



Из математики известно, что минимум функции будет, если первая

производная ее равна нулю, а вторая – больше нуля, т. е.





Решив уравнение, относительно L, получим

