

ПОСТРОЕНИЕ ЛЕКАЛЬНЫХ КРИВЫХ.

Коробовые кривые и овалы состоят из нескольких дуг различного радиуса. Это значит, что на всем протяжении каждой дуги кривизна кривой остается постоянной. Но есть много кривых, кривизна которых изменяется непрерывно на каждом элементе кривой, для их выполнения существуют так называемые лекала, поэтому и кривые называются **лекальными кривыми**. Для построения такой кривой сначала находят несколько точек (не менее трех), по которым проводят плавную линию.

К лекальным кривым, вычерчиваемым по точкам, относятся кривые различных диаграмм и так называемые плоские кривые второго порядка:

- эллипс;
- парабола;
- гипербола;
- циклоида;
- гипоциклоида;
- эпициклоида;
- спирали и др.

Эллипсом называется замкнутая кривая, сумма расстояний каждой точки которой от двух данных точек, называемых фокусами, постоянна (Рисунок 1) $1F_1+1F_2=2F_1+2F_2=...nF_1+nF_2=const$.

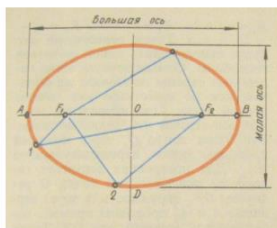


Рисунок 1 - Эллипс

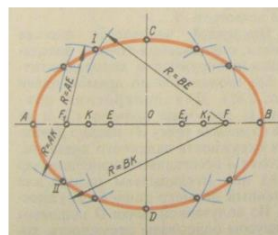


Рисунок 2 - Построение эллипса по заданному расстоянию между фокусами F_1 и F_2 и его большой оси АВ

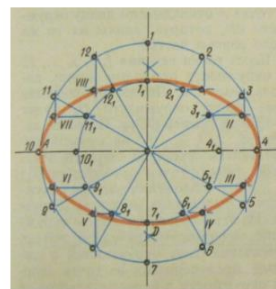


Рисунок 3 - Построение эллипса по заданным осям

Рассмотрим пример построения эллипса по заданному расстоянию между фокусами F_1 и F_2 и его большой оси АВ (Рисунок 2). Для этого откладываем от точек А и В по половине расстояния между фокусами и получаем точки Е и E_1 (таким же образом можно использовать любую точку, взятую на АВ между фокусами). Через точку О перпендикулярно АВ проводим линию, на которой будет расположена малая ось эллипса CD. Для этого делаем засечки на этой прямой из точки F_1 или F_2 радиусом, равным половине длины большой оси, и получаем малую ось эллипса CD.

Чтобы получить одну точку, принадлежащую эллипсу, необходимо из фокуса F_2 провести дугу $R=AE$, а из фокуса F_1 провести дугу $R=BE$, в пересечении дуг получим точку I, принадлежащую эллипсу, так как $AE+BE=AB$. Таким же способом определяют любую точку эллипса, например точку II, для чего на АВ надо взять точку К.

Построим эллипс по заданным осям большой АВ и малой CD (Рисунок 3). Из точки О чертим две concentric окружности, диаметры которых равны заданным осям эллипса. Обе окружности делим на произвольное, но равное число частей, например двенадцать. Через точки деления 1, 2, 3, 4 и т.д. на большой окружности проводим прямые, параллельные CD, а через точки деления на малой окружности — прямые, параллельные АВ. От взаимного пересечения этих прямых получим ряд точек: I, II, III, IV и т.д., это и будут искомые точки эллипса, которые соединим плавной кривой по лекалу.

Параболой называется плоская кривая, каждая точка которой расположена на одинаковом расстоянии от заданной прямой, называемой директрисой, и от точки, называемой фокусом параболы (Рисунок 4): $BK=KF$, $B_1K_1=K_1F$ и т.д. Расстояние между фокусом и директрисой называется

параметром параболы, от которого и зависит очертание этой кривой. С изменением параметра изменяется и парабола: чем меньше параметр, тем она уже, чем больше, тем парабола шире.

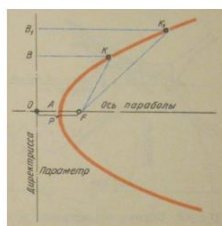


Рисунок 4 Парабола

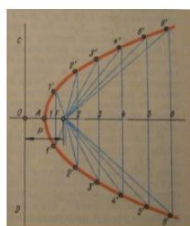


Рисунок 5 Построение параболы по заданному параметру p

Построим параболу по заданному параметру p (Рисунок 5). Для этого проводим горизонтальную ось параболы и на ней откладываем заданный параметр, после чего определяем точку A - вершину параболы, фокус и директрису. Вершина параболы находится в середине отрезка OF , т.е. на расстоянии $p/2$ от точек O и F . Через точку O проводим прямую CD перпендикулярную AB . Вправо от вершины A отмечаем ряд произвольных точек $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Через намеченные точки проводим прямые, параллельные CD , а на них из фокуса F как из центра радиусом $0-1, 0-2, 0-3, \dots, 0-6$ делаем засечки, пересекающие прямые в точках $1'=1; 2'=2$ и т.д. Соединяя полученные по точки с вершиной и между собой по лекалу, получим кривую линию, называемую параболой.

Гиперболой называется плоская кривая, у которой разность расстояний любой точки от фокусов F_1 и F постоянна и равна расстоянию между вершинами (Рисунок 6), т.е. $F_1B - FB = F_1B_1 - FB_1 = \dots F_1n - Fn = \text{const} = AA_1$. Гипербола состоит из двух ветвей, симметрично расположенных относительно точки O . Обе ветви стремятся приблизиться к линиям, называемым асимптотами. Точка пересечения асимптот называется центром. Расстояние между вершинами ветвей гиперболы называется параметром гиперболы: $AA_1 = 2a$.

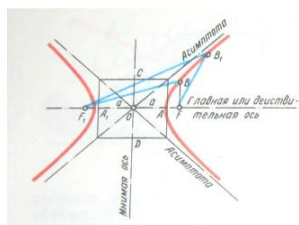


Рисунок 6 Гипербола

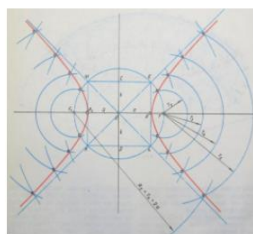


Рисунок 7 Построение гиперболы

Рассмотрим построение гиперболы по данной действительной оси $AA_1 = 2a$ и фокусами F_1 и F (Рисунок 7). На горизонтальной прямой откладываем заданный параметр гиперболы $AA_1 = 2a$ и фокусы внутри гиперболы. Из точки F_1 как из центра проводим ряд дуг произвольными радиусами r_1, r_2, r_3 и т.д., затем из точки F засекаем эти дуги радиусами $R_1 = r_1 + 2a, R_2 = r_2 + 2a, R_3 = r_3 + 2a$ и т.д. Точки пересечения дуг будут принадлежать одной из ветвей гиперболы. Симметричную ветвь гиперболы строим подобным же образом или по известным уже точкам первой ветви. Для проведения мнимой оси отрезок AA_1 делим пополам. Это будет центр O , через который проводим линию, перпендикулярную AA_1 . Для построения асимптот гиперболы описываем из точки O радиусом OF_1 окружность, а через вершины A и A_1 проводим прямые, параллельные мнимой оси OY . Точки пересечения проведенных прямых с окружностью определяют направление асимптот.

Циклоидой называется плоская кривая, описываемая точкой, которая катится без скольжения по прямой линии (Рисунок 8). Для построения циклоиды проводим прямую CB и на ней отмечаем точку A - начало движения окружности заданного диаметра. В точке A восстанавливаем перпендикуляр и на нем откладываем радиус или заданный диаметр данной окружности. Из полученной точки O заданным радиусом описываем окружность, которую делим на равные части, например на 12. На прямой CB от точки A откладываем длину окружности πD , которую делим на то же число равных частей.

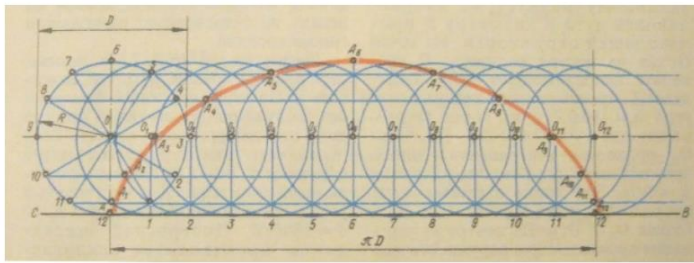


Рисунок 8 Построение циклоиды

Через точки деления 1, 2, 3, ..., 12 на окружности проводим линии, параллельные СВ. Линия, проходящая через центр окружности О, будет центральной линией ОО₁₂. Из точек деления 1, 2, 3, ..., 12 на прямой СВ восставляем перпендикуляры до центральной линии, точки пересечения О₁, О₂, ..., О₁₂ - положение центров окружности в различные моменты движения. Из этих точек описываем окружности заданного радиуса. В точках пересечения этих окружностей с линиями, проведенными из точек деления окружности в первоначальном ее положении, параллельными СВ, получим точки, принадлежащие кривой циклоиды, соединив которые между собой по лекалу, получим кривую, называемую циклоидой.

Гипоциклоидой (Рисунок 9) называется кривая, описываемая точкой окружности, которая катится без скольжения по внутренней стороне дуги неподвижной окружности. Катящаяся окружность называется производящей, а дуга - направляющей.

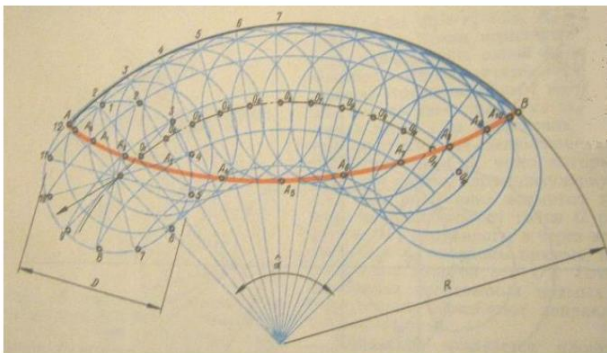


Рисунок 9 Построение гипоциклоиды

Построим гипоциклоиду - по заданному радиусу R, направляющей дуги и диаметру D производящей окружности. Из точки О как из центра радиусом R проводим направляющую дугу. Определяем произвольный центральный угол $\hat{\alpha} = 180d/R$ и из точки О проводим два луча ОА и ОВ. Из точки ОО проводим центральную линию производящей окружности радиусом $R = OO_0$. Эта линия пересечет лучи, проходящие через точки А и В, в точках О₀ и О₁₂. Из центра О₀ проводим производящую окружность диаметром D и делим ее, например на двенадцать частей, отмечая точки деления. Дугу АВ делим на такое же число равных частей и тоже отмечаем все точки. Из точки О через точки деления О₁, ...О₁₂ проводим лучи до пересечения с линией центров, а через точки деления 1...12 производящей окружности проводим вспомогательные дуги.

Пересечения вспомогательных дуг с производящей окружностью при ее движении дадут искомые точки, соединив которые плавной кривой по лекалу, получим кривую, называемую гипоциклоидой.

Эпициклоидой (Рисунок 10) называется плоская кривая, которую описывает точка окружности при ее качении без скольжения по наружной стороне дуги неподвижной окружности. Если обозначить диаметр производящей окружности через D , радиус направляющей дуги через R , а центральный угол охвата эпициклоиды через $\hat{\alpha}$, то $\hat{\alpha} = 180D/R$. Построение эпициклоиды производится аналогично построению гипоциклоиды.

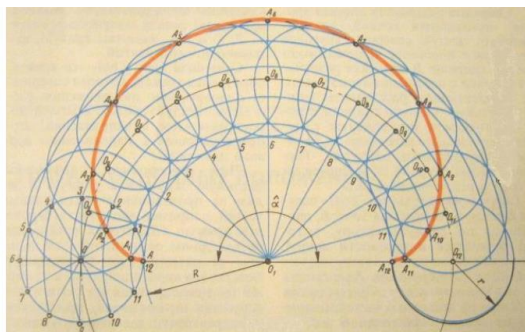


Рисунок 10 Построение эпициклоиды

Спиралью называется плоская кривая, описываемая точкой, удаляющейся от центра, совершая круговое движение в плоскости чертежа около центра спирали. В практике различают спирали с постоянным и постепенно возрастающим расстоянием между завитками. Обычно спирали строят по точке и вычерчивают с помощью лекала.

Спираль Архимеда (Рисунок 11) – плоская кривая, описываемая точкой, движущейся по радиусу-вектору, который вращается в плоскости вокруг неподвижной точки O .

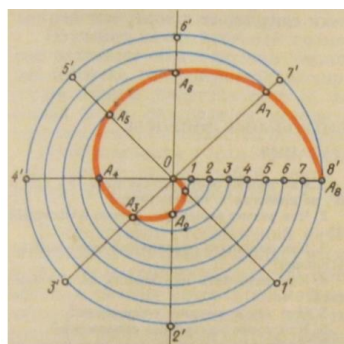


Рисунок 11 Спираль Архимеда

Построим спираль Архимеда по заданному шагу. Шаг спирали A_8 делим на несколько частей, например на 8. Из точки O как из центра проводим окружность радиуса R , равного шагу, и делим ее тоже на восемь частей и проводим радиусы-векторы $O1'$, $O2'$, $O3'$, ..., $O8'$. Дугами, проведенными из центра O , переносим точку 1 с шага на радиус-вектор $O1'$, точку 2 на $O2'$, точку 3 на $O3'$ и т.д. Через полученные точки $A_1, A_2, A_3, \dots, A_8$ проводим кривую линию-спираль Архимеда (один оборот).

Эвольвента круга (Рисунок 12) – это плоская кривая, образуемая точкой на прямой, которая перемещается без скольжения по неподвижной окружности заданного радиуса. Эта кривая иногда называется разверткой окружности.

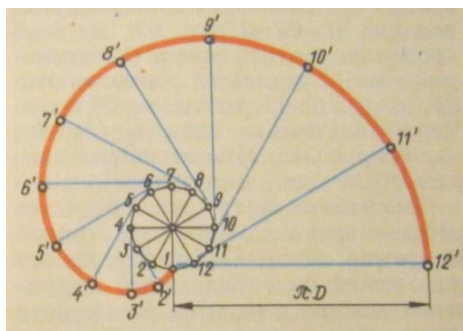


Рисунок 12 Эвольвента круга

Построение эвольвенты начинается с деления заданной окружности на произвольное число равных частей, например двенадцать. В точках 1,2,3 и т.д. проводим касательные к окружности. На каждой из этих касательных последовательно откладываем длину окружности, равную $\pi D/12$, в точке 1, затем $2\pi D/12$ – в точке 2 и т.д. На касательной к точке 12 откладываем длину окружности, равную πD . Соединяя последовательно плавной кривой по лекалу полученные точки 1', 2', 3' и т.д., получим кривую, называемую эвольвентой.

Синусоида (Рисунок 13) - это кривая, образуемая точкой, которая совершает одновременно два движения: равномерно поступательное и обратно поступательное в направлении, перпендикулярном к направлению первого движения.

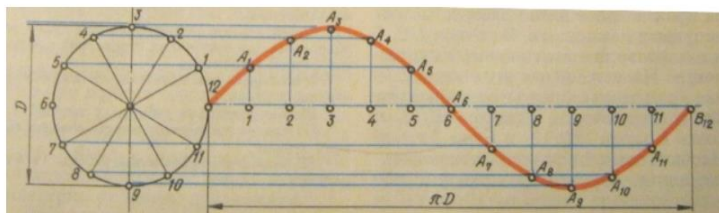


Рисунок 13 Синусоида

Для построения синусоиды заданную окружность радиуса R делим на произвольное число равных частей, например двенадцать. Проводим прямую АВ, которая должна равняться длине окружности $2\pi R$, и делим ее на такое же число частей. Восстанавливая перпендикуляры к прямой АВ из точек деления 1, 2, 3 и т.д. и пересекая их прямыми, проведенными через точки деления окружности, получим при пересечении искомые точки синусоиды A1, A2,