Кривые второго порядка. Эллипс

Задача 1. Дано уравнение эллипса: $4x^2 + 25y^2 = 100$. Приведите его к каноническому виду. Найдите параметры a, b, c, фокусы, эксцентриситет. Постройте эллипс.

Решение. Разделим обе части уравнения на 100, получим каноническое уравнение эллипса:

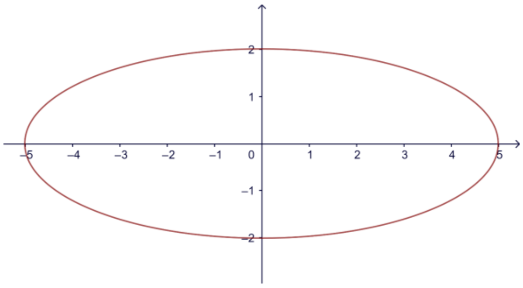
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Тогда $a = 5$, $b = 2$.

Из равенства $b^2 = a^2 - c^2$ выразим $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21} \approx 4{,}6$.

Найдем эксцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{21}}{5} \approx 0{,}9$.

Построим эллипс



Ответ: $a = 5$, $b = 2$, $c = \sqrt{21}$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{21}}{5}$.

Задача 2. Составьте каноническое уравнение эллипса, эксцентриситет которого равен $\frac{2}{3}$, а фокусы находятся в точках $F_1(-6; 0)$, $F_2(6; 0)$.

Решение. Зная абсциссы фокусов, определим параметр $c = 6$.

Эксцентриситет вычисляется по формуле $\varepsilon = \frac{c}{a}$, значит, $\frac{6}{a} = \frac{2}{3}$, откуда $a = 9$, $a^2 = 81$.

Вычислим $b^2 = a^2 - c^2 = 81 - 36 = 45$.

Получаем каноническое уравнение эллипса: $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{45} = 1$.

Ответ: $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{45} = 1$.

Задача 3. Убедитесь, что уравнение $4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y = 11$ задает эллипс. Постройте эту кривую.

Решение. Учитывая, что коэффициент при xy в уравнении кривой равен 0, определитель δ, составленный из коэффициентов при одночленах второй степени, будет иметь вид: $\delta = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = 36$.

Значит, если кривая не является мнимой, то это либо эллипс, либо точка (вырожденный эллипс). В том, что линия не вырождается в точку, можно убедиться, вычислив определитель Δ, составленный на основе всех коэффициентов левой части общего уравнения кривой.

Чтобы построить эллипс, преобразуем исходное уравнение к уравнению, которое будет каноническим в другой системе координат. Чтобы определить центр эллипса, выделим в уравнении полные квадраты в слагаемых, содержащих одинаковые переменные:

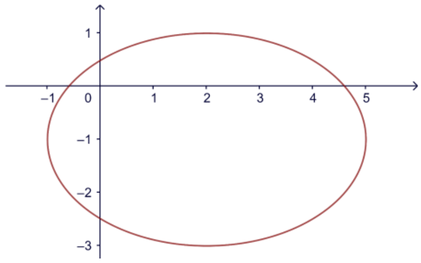
$$4(x^2-4x)+9(y^2+2y)=11,$$

$$4(x^2-4x+4)-16+9(y^2+2y+1)-9=11,$$

$$4(x-2)^2+9(y+1)^2=36\ \mid:36,$$

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{4}=1\ .$$

Центр эллипса находится в точке $Q(2;-1)$. Система координат с центром в точке Q, оси которой параллельны исходным осям, является канонической системой координат для данного эллипса. В этой системе уравнение эллипса имеет вид $\frac{x\prime^2}{9}+\frac{y\prime^2}{4}=1$.



Ответ: $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$.