Анастасия Селищева

Элементы комбинаторики и теории вероятностей

Учебно-методическое пособие

А. А. Селищева

Элементы комбинаторики и теории вероятностей

Подготовка к ЕГЭ

Учебно-методическое пособие

МБОУ «СОШ №3 им. Страховой З.Х.»

Донской, 2021

Авторы:А.А. Селищева

Рецензент: Н.С. Сажнева, учитель математики

Элементы комбинаторики и теории вероятностей. Подготовка к ЕГЭ: учебно-методическое пособие/ А.А. Селищева; под ред. Н.С. Сажневой. – Донской: МБОУ «СОШ №3 им. Страховой З.Х.», 2021. – 68 с. – (ЕГЭ).

Наше пособие предназначено для подготовки к ЕГЭ по математике. Работая по этой книге, школьники приобретут прочные, фундаментальные навыки выполнения заданий ЕГЭ по комбинаторике и теории вероятностей – от базовых до самых сложных.

Книга содержит:

- основные типы заданий с их разбором, составленные в соответствии с проектами спецификации и демоверсии ЕГЭ, опубликованными на сайте ФИПИ www.fipi.ru;
- ответы ко всем заданиям и развернутые комментарии к наиболее сложным заданиям.

Книга адресована старшеклассникам и может быть полезна учителям как дополнение к учебнику, для организации повторения и систематизации изученного материала

МБОУ «СОШ №3 им. Страховой З.Х.», 2021

Содержание

Введение

Наше пособие предназначено для подготовки к ЕГЭ по математике по теме «Элементы комбинаторики и теории вероятностей», а также и к другим формам контроля и аттестации в 10-11 классах.

Справочник содержит учебный материал по следующим темам: элементы комбинаторики, правила комбинаторики, виды непосредственных подсчетов, элементы теории вероятностей, геометрическая вероятность событий, виды событий.

Пособие содержит весь необходимый материал для успешной подготовки к экзаменам по теме «Теория вероятностей». Оно удобно для систематизации знаний по данной теме благодаря большому количеству примеров и простым объяснениям, облегчающих восприятие материала.

Справочник предназначен прежде всего учащимся 11-х классов, готовящимся к сдаче ЕГЭ, а также ученикам 10-го класса для подготовки к ВПР.

Пособие может быть использовано учителями математики как дополнение к школьным учебникам для организации повторения и систематизации изученного материала.

Желаем успехов!

Раздел 1. Элементы комбинаторики

Комбинаторика – раздел математики, который изучает задачи выбора и расположения элементов из некоторого основного множества в соответствии с заданными правилами.

1.1. Перестановки

Перестановкой из n называют комбинацию, имеющую n элементов, взятых из наперед заданных n элементов без повторений.

✓

$$\mathbf{P_n=n!}$$

$$\mathbf{n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n}$$

$$\mathbf{1!=1}$$

$$\mathbf{0!=1}$$

Пример 1. Сколькими различными способами можно составить список учеников из 5 человек?

Решение: $P_5=5!=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120$

Ответ: 120 способов.

Пример 2. В соревнованиях участвуют 6 команд: A, B, C, D, E и F. Сколько существует вариантов расположений команд с первого по шестое место, где команда A ни на первом, ни на последнем месте?

Решение:

1) Вычисляются все возможные порядки построения команд.

$P_6=6!=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=720$.

2) Вычисляются все возможные порядки, где команда А не на первом месте.

$P_5=5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$.

3) Вычисляются все возможные порядки, где команда А не на последнем месте.

$P_5=5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$.

4) Вычисляется, сколько существует вариантов расположений команд с первого по шестое место, где команда А ни на первом, ни на последнем месте.

Из количества всех возможных вариантов вычитаются вычисленные ограничения: $720-(120+120)=480$ (способов).

Ответ: 480 способов.

Пример 3.Сколькими способами 28 учеников могут выстроиться в очередь в столовую так, чтобы Петя Иванов и Коля Васин не стояли друг за другом?

*Решение:*Временно уберём из очереди Петю. Оставшихся учеников можно расставить 27! способами. Петю в каждую очередь можно вставить 28 способами, но два из них – перед Колей и после него – запрещены, значит, 28-2=26 способов для Пети.

Получается: 26·27!

Ответ: 26·27!

Задачи для самоконтроля

1) Рекламный агент составляет эскиз для фасада центрального офиса. Ему заказали оформить его полосами, используя красный, розовый, белый и малиновый цвета. Сколькими способами это можно сделать?
2) Сколько всего шестизначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 4, 5, 7 и 9, если в каждом из этих чисел ни одна цифра не повторяется?
3) В забеге участвует 5 бегунов из разных стран: Россия, Голландия, Англия, Швейцария, Чехия. Сколькими способами можно расположить участников на линии старта так, чтобы бегун из Голландии не стоял рядом с участником из Англии?

1.2. Размещения

Размещением n по k называют комбинацию, имеющую k элементов, взятых из наперед заданных n элементов без повторений.

✓ $$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$$

$$A_n^n = n! = P_n$$

$\mathbf{A_n^k = n^m}$ – размещения с повторениями

Пример 4. У стола осталось 6 свободных мест. Сколькими различными способами места могут занять 4 человека?

Решение:

$$\mathbf{A}_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{2!\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}{2!} = 3\cdot4\cdot5\cdot6 = 360.$$

Ответ: 360 способов.

Пример 5. Сколько трехзначных чисел (без повторения цифр) можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6?

Решение: Если среди семи цифр нет нуля, то число трехзначных чисел (без повторения цифр), которые можно составить из этих цифр, равно числу $\mathbf{A}_7^3$

Однако среди данных цифр есть цифра 0, с которой не может начинаться трехзначное число. Поэтому из $\mathbf{A}_7^3$ надо исключить те размещения, у которых первым элементом является цифра 0. Их число равно $\mathbf{A}_6^2$.

Значит, искомое число трехзначных чисел равно:

$$\mathbf{A}_7^3 - \mathbf{A}_6^2 = \frac{7!}{(7-3)!} - \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{7!}{4!} - \frac{6!}{4!} = \frac{4!\cdot5\cdot6\cdot7}{4!} - \frac{4!\cdot5\cdot6}{4!} = 5\cdot6\cdot7-5\cdot6 =$$

$$= 210-30=180.$$

Ответ: 180 чисел.

Задачи для самоконтроля

1) Научное общество состоит из 25 человек. Надо выбрать президента общества, вице-президента, ученого секретаря и казначея. Сколькими способами может быть сделан этот выбор, если каждый член общества может занимать лишь один пост?

2) Учащиеся 2 класса изучают 8 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на один день, чтобы в нем было 4 различных предмета?

3) Сколько семизначных телефонных номеров можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, в каждом из которых ни одна цифра не повторяется?

1.3. Сочетания

Сочетание из n по k называют комбинацию, имеющую k элементов, взятых из наперед заданных n элементов без повторений.

✓ $\boxed{C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}}$

$C_n^k = \frac{(n+k-1)}{k!(n-1)}$ – сочетания с повторениями

✓ $\boxed{C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}}$

Пример 6. Сколькими способами из 12 учеников можно выбрать 3-х учеников?

Решение:

$$\mathbf{C}_{12}^{3} = \frac{12!}{3!(12-3)!} = \frac{12!}{3!\cdot 9!} = \frac{9!\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{3!\cdot 9!} = \frac{10\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{1320}{6} = 220.$$

Ответ: 220 способов.

Пример 7. Предприятие может предоставить работу по одной специальности 4 женщинами, по другой - 6 мужчинам, по третьей - 3 работникам независимо от пола. Сколькими способами можно заполнить вакантные места, если имеются 14 претендентов: 6 женщин и 8 мужчин?

Решение:

1) Выберем работников на первую специальность, то есть 4 женщин из 6: $\mathbf{C}_{6}^{4} = \frac{6!}{4!\cdot 2!} = 15$.

2) Выберем работников на вторую специальность, то есть 6 мужчин из 8: $\mathbf{C}_{8}^{6} = \frac{8!}{6!\cdot 2!} = 28$.

3) Осталось 2 женщины, 2 мужчин и 3 вакантных места, которые, по условию, могут занять любые из четырех оставшихся человек. Это может быть сделано 2 вариантами:

- 1 женщина и 2 мужчин: выбираем женщину $\mathbf{C}_{2}^{1}=2$ способами
- 1 мужчина и 2 женщины: выбираем мужчину $\mathbf{C}_{2}^{1}=2$ способами

Получаем: 15·28(2 + 2) = 1680

Ответ: 1680 способов.

Пример 8. Группу из 20 студентов нужно разделить на 3 бригады, причем в первую бригаду должны входить 3 человека, во вторую — 5 и в третью — 12. Сколькими способами это можно сделать?

Решение:

1) Создавая первую бригаду, отбирают 3 человека из 20: $\mathbf{C_{20}^{3}}$;

создавая вторую – 5 из оставшихся 17: $\mathbf{C_{17}^{5}}$;

создавая третью – 12 из оставшихся 12: $\mathbf{C_{12}^{12}}$.

2) Создавая сложную комбинацию (из 3-х бригад, воспользуемся правилом умножения **(см. стр 13)**

$$N= C_{20}^{3} \cdot C_{17}^{5} \cdot C_{12}^{12} = \frac{20!}{3!(20-3)!} \cdot \frac{17!}{5!(17-5)!} \cdot \frac{12!}{12!(12-12)!} = \frac{20!}{3!\cdot 17!} \cdot \frac{17!}{5!\cdot 12!} \cdot \frac{12!}{12!\cdot 0!}$$
$$= \frac{18\cdot 19\cdot 20\cdot 13\cdot 14\cdot 15\cdot 16\cdot 17}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 7054320.$$

Ответ: 7054320 способов.

Задачи для самоконтроля

1) Для участия в команде тренер отбирает 5 мальчиков из 10. Сколькими способами он может сформировать команду, если 2 определенных мальчика должны войти в команду?

2) Университет может предоставить 3 места абитуриентам с золотой медалью, 7 мест абитуриентам без медали и 3 места

абитуриентам вне зависимости от наличия медали. Сколькими способами можно заполнить места, если имеются 14 желающих: 9 без медали и 5 с медалью?

3) В группе 9 человек. Сколько можно образовать разных подгрупп при условии, что в подгруппу входит не менее 2 человек? *

*- используйте правило сложения **(см. стр 13)**

1.4. Правила комбинаторики

Теперь разберем правила комбинаторики: правило умножения и правило сложения.

- Правило сложения (правило «или»)

Если два действия A и B не имеют общих элементов, причем действие A можно выполнить m способами, а B – n способами, то выполнить одно любое из этих действий (либо A, либо B) можно n + m способами.

Пример 5. На тарелке лежит 5 яблок и 7 слив. Сколькими способами можно взять фрукт с тарелки?

Решение: Сложим количество яблок и слив 5+7=12

Ответ: 12 способов.

Если один из способов выбора действия A совпал с каким-либо способом выбора действия B, то правило сложения имеет вид:

$\boxed{N=m+n-k}$, где k — число совпадений.

Пример 6. В группе 7 человек имеют «5» по математике, 9 человек — «5» по философии. В сессии 2 экзамена. Известно, что 4 человека сдали сессию отлично. Сколько человек имеет хотя бы одну пятерку в сессии?

Решение: $7+9-4=12$

Ответ: 12 способов.

- Правило умножения (правило «и»)

Если действие A можно выполнить m способами, а B – n способами, то упорядоченная пара (A и B) может быть составлена $m \cdot n$ способами.

Пример 7. В меню столовой указано 4 закусок, 7 первых блюда, 4 вторых и 5 десерта. Каким числом способов можно заказать обед из четырех блюд?

Решение: Перемножим все имеющиеся числа$4 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 5=560$

Ответ: 560 способов.

Пример 8. Марина купила 3-х кроликов: серого, белого и рябого. Сколько существует различных способов посадить этих кроликов в 3 клетки, если в одной клетке может находиться только 1 кролик?

Решение:

В первую клетку можно посадить одного из 3 кроликов — 3 возможности.

Во вторую клетку можно посадить одного из 2 оставшихся кроликов — 2 возможности.

В третьей клетке остаётся последний кролик — 1 возможность.

Вместе $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Ответ: 6 способами.

Задачи для самоконтроля

1) Из города А в город В ведет 5 дорог, из города А в город С ведет 4 дороги; из В в D – 3 дороги; из С в D – 6 дорог. В и С маршрутами не соединены. Сколько маршрутов можно провести между городами А и D?*
2) Четыре мальчика и четыре девочки садятся на 8 расположенных подряд стульев, причём мальчики садятся на места с чётными номерами, а девочки – на места с нечётными номерами. Сколькими способами это можно сделать?
3) В магазине «Все для чая» продается 5 чашек, 3 блюдца и 4 чайные ложки. Сколькими способами можно купить два предмета с разными названиями? *

*** - используйте оба изученных правила.**

1.5. Непосредственные подсчеты

- ***Логический перебор***

Пример 9. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Определите все возможные комбинации выпадения орла и решки.

Решение:

Обозначим: орел – О, решка – Р.

Сначала рассмотрим все возможные варианты выпадения орла и решки, когда орел будет на первом месте: ОО, ОР.

Теперь решка на первом месте: РР, РО. Складываем варианты и получаем 4.

Ответ: 4 комбинации.

- ***Таблица вариантов***

Таблица вариантов удобна при подсчете числа комбинаций из двух элементов.

Пример 10. Сколько нечетных двузначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 5, 8, 9?

Решение: Составляем таблицу: верхняя строка – десятки, первый столбик – единицы.

	1	5	9
1	11	15	19
2	21	25	29
5	51	55	59
8	81	85	89
9	91	95	99

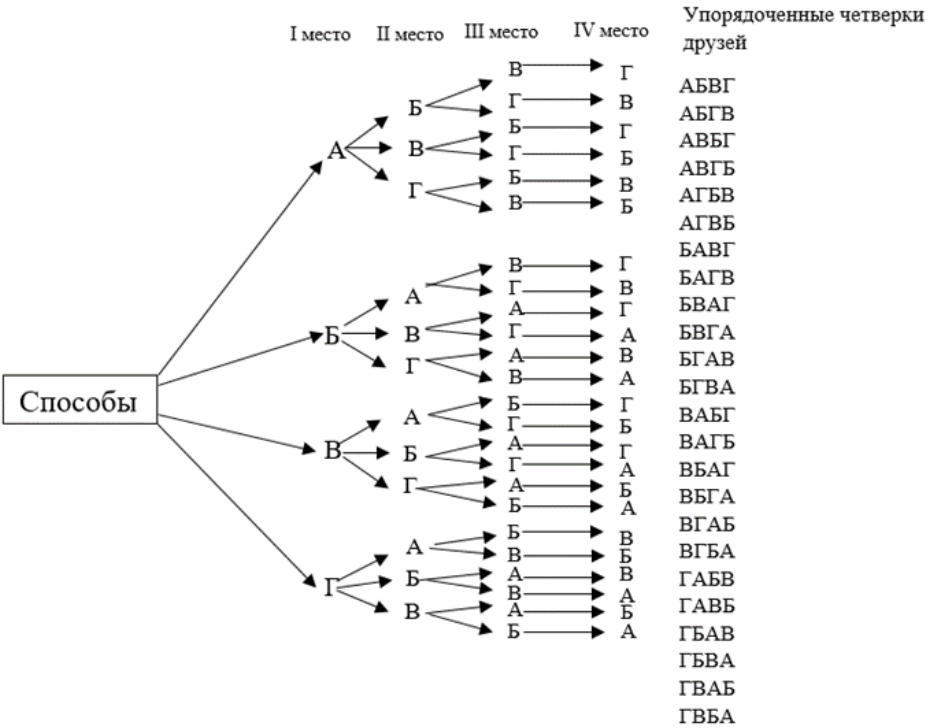
Перемножим данные таблицы 3*5=15

Ответ: 15 чисел.

- ***Граф-дерево***

Пример 11. Антон, Борис, Василий и Григорий купили 4 билета на хоккейный матч на 1, 2, 3 и 4-е места первого ряда. Сколькими способами они могут занять имеющиеся четыре места?

Решение:



Ответ: 24 способа.

Задачи для самоконтроля

1) В финальном забеге на 100 м участвуют Иванов, Громов и Орлов. Сколько возможных вариантов распределения призовых мест.
2) Маша, Оля, Вера, Ира, Андрей, Миша и Игорь готовились стать ведущими на Новогоднем празднике. Сколько существует возможных вариантов, если ведущими могут быть только одна девочка и один мальчик.

3) В шахматном турнире принимали участие 15 шахматистов, причем каждый из них сыграл только одну партию с каждым из остальных. Сколько всего партий было сыграно в этом турнире?

Дополнительные задачи

1) Сколько слов получится при перестановке букв в слове: а) «толпа», б)«топот», в) «Миссисипи», г) «колобок»?
2) Сколько существует перестановок букв слова «конус», в которых буквы к, о, н стоят рядом?
3) Сколькими способами можно расположить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не могли бить друг друга?
4) Сколькими способами можно разместить на полке 4 книги?
5) Сколькими способами 5 мальчиков и 2 девочки могут выстроиться в линейку так, чтобы 2 девочки не стояли друг за другом?
6) Сколькими способами можно разбить на две команды группу из 7 мальчиков и 8 девочек так, чтобы в одной из команд было ровно 4 мальчика и 3 девочки?
7) Сколько экзаменационных комиссий, состоящих из 7 членов можно образовать из 14 преподавателей?
8) Из вазы с фруктами, в которой лежит 9 яблок и 6 груш, надо выбрать 3 яблока и 2 груши. Сколькими способами можно сделать такой выбор?
9) В ларьке продаются 15 роз и 18 тюльпанов. Ученик 9-го класса хочет купить 3 цветка для своей одноклассницы, причем все цветы должны быть одинаковыми. Сколькими способами он может составить такой букет?

10) В кондитерском отделе продаются пирожные семи сортов: наполеоны, эклеры, песочные и слоеные. Сколькими способами можно купить семь пирожных?
11) Издательство приступило к изданию словарей иностранных языков. Сколько словарей надо издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из 5 языков: русского, английского, французского, немецкого и итальянского на любой другой из этих пяти языков?
12) Сколькими способами можно обозначить вершины данного треугольника, используя буквы A, B, C, D и E?
13) Укротитель хищных зверей хочет вывести на арену 5 львов и 4 тигра, при этом нельзя, чтобы два тигра шли друг за другом. Сколькими способами он может расположить зверей?
14) В розыгрыше первенства по футболу принимают участие 18 команд. Сколькими способами могут быть распределены золотая, серебряная и бронзовая медали, если любая команда может получить только одну медаль?
15) В классе учится 25 учеников, нужно выбрать 4 ученика таким образом один ученик должен подготовить доклад, второй - решить геометрическую задачу, третий - подготовить презентацию, четвертый - выучить стих.
16) В классе 14 девочек и 12 мальчиков. Сколькими способами можно выбрать ученика из этого класса?
17) В гардеробе ученика есть 3 рубашки и 5 футболок. Сколько существует вариантов выбрать одежду для прогулки?
18) В классе 9 человек имеют «5» по русскому языку, 7 человек — «5» по истории, 3 человека – «5» по математике. Ученики писали 3

контрольные работы. Известно, что 6 человек написали контрольные на отлично. Сколько человек имеет хотя бы одну пятерку по контрольной?

19) В цветочный магазин привезли 15 роз и 9 гвоздик. Сколькими способами можно выбрать букет из 5 цветов, чтобы среди этих цветов было 3 розы?
20) Имеется 20 изделий 1-го сорта и 30 изделий 2-го сорта. Необходимо выбрать 2 изделия одного сорта. Сколькими способами можно это сделать?
21) В магазине «Все для чая» есть 5 разных чашек, 3 блюдца и еще 4 ложки. Сколькими способами можно купить комплект из чашки, блюдца и ложки?
22) Из города А в город В ведут две дороги, из города В в город С — три дороги, из города С до пристани — две дороги. Туристы хотят проехать из города А через города В и С к пристани. Сколькими способами они могут выбрать маршрут?
23) В книжном магазине есть 7 экземпляров романа Ф.М. Достоевского «Идиот», 4 экземпляра его же романа «Братья Карамазовы» и 5 экземпляров «Преступление и наказание». Кроме того есть 5 томов, содержащих романы «Идиот» и «Преступление и наказание», и 7 томов, содержащих «Преступление и наказание» и «Братья Карамазовы». Сколькими способами можно сделать покупку, содержащую по одному экземпляру каждого из романов?
24) Необходимо составить варианты контрольной работы, каждый из которых должен содержать три задачи. Первая задача выбирается из любого параграфа I главы сборника, вторая - из любого параграфа II главы, а третья - из любого параграфа III главы.

Сколько видов контрольной работы можно составить, если I и III глава содержат два параграфа, а II глава - три параграфа?

25) Шесть мальчиков и шесть девочек садятся на 12 расположенных подряд стульях, причем мальчики садятся на места с четными номерами, а девочки - на места с нечетными номерами. Сколькими способами это можно сделать?

26) В Стране Чудес есть три города: A, B и C. Из города A в город B ведет 6 дорог, а из города B в город C — 4 дороги. Затем построили еще один город — D и несколько новых дорог — 2 из A в D и 2 из D в C. Сколькими способами можно добраться из города A в город C?

27) Для своих двух книг Маша купила три разные обложки. Сколькими различными способами она может обернуть книги купленными обложками?

28) Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5?

29) В 8 “а” классе лучше всех математику знают 5 учеников: Вася, Дима, Олег, Катя и Аня. На олимпиаду по математике нужно отправить пару, состоящую из 1 мальчика и 1 девочки. Сколькими способами учительница может эту пару выбрать?

30) В кружок бального танца записались Петя, Коля, Витя, Олег, Таня, Оля, Наташа, Света. Сколько танцевальных пар из девочки и мальчика может образоваться?

31) В школьной столовой приготовили на завтрак кашу, омлет и блины, а из напитков – сок, чай и молоко. Сколько различных вариантов завтрака можно составить?

32) При составлении расписания завуч хочет на первый урок поставить алгебру или физику, а на второй – историю, географию или

иностранный язык. Сколько существует вариантов расписания для первых двух уроков?

33) Катя собирается на каникулы. Она может поехать с бабушкой или с родителями. Если Катя поедет с бабушкой, то она сможет провести каникулы или на даче, или в городе, или в деревне. Если она поедет с родителями, то она сможет провести каникулы или отдыхая в санатории, или путешествия по горам, или путешествуя на теплоходе. Сколько разных вариантов есть у Кати, чтобы провести свои каникулы?

34) Андрей, Борис, Виктор и Григорий играли в шахматы. Каждый сыграл с каждым по одной партии. Сколько партий было сыграно?

35) Вася, Коля, Петя, Аня и Наташа - лучшие лыжники в пятом классе. Для участия в соревнованиях нужно выбрать из них одного мальчика и одну девочку. Сколькими способами это можно сделать?

Раздел 2. Элементы теории вероятностей

Теория вероятностей — это раздел математики, который изучает закономерности случайных явлений: случайные события, случайные величины, их свойства и операции над ними.

2.1. Частота событий

Пусть при проведении n случайных опытов событие А наступило k раз. *Частотой события* А называют отношение k/n.

Пример 1. В некотором городе из 5000 появившихся на свет младенцев 2512 мальчиков. Найдите частоту рождения девочек в этом городе. Результат округлите до тысячных.

Решение:

1) 5000 – 2512=2488 – девочки

2) 2488/5000=0,4976 ≈ 0,498

Ответ: 0,498.

Задачи для самоконтроля

1) Наблюдения показывают, что в среднем среди 1000 новорожденных детей 515 мальчиков. Найдите частоту рождения мальчика в такой серии наблюдений.

2) Английский математик Карл Пирсон (1857 – 1936) бросал монету 24000 раза, причем герб выпал 12012 раз. Найдите частоту выпадения герба в данной серии испытаний.

2.2. Классическая теория вероятностей

Вероятность — это степень возможности, что какое-то событие произойдет.

Вероятность события А определим, как отношение числа m случаев, благоприятствующих событию А, к общему числу n рассматриваемых случаев:

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n}}$$

Пример 2. В сборнике 15 билетов, в 12 из них встречается вопрос по электростатике. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по электростатике.

Решение: P(A)=12/15=0,8.

Ответ: 0,8.

Пример 3. Маша включает телевизор. Телевизор включается на случайном канале. В это время по девяти каналам из сорока пяти показывают новости. Найдите вероятность того, что Маша попадет на канал, где новости не идут.

Решение:

1) 45-9=36 – каналы, где новости не идут;

2) P(A)=36/45=0,8.

Ответ: 0,8

Пример 4. В группе туристов 30 человек. Их забрасывают вертолетом в несколько приемов в труднодоступный район по 6 человек за рейс. Порядок, в котором вертолетов перевозит туристов, случаен. Найдите вероятность того, что турист П. полетит первым рейсом вертолета.

Решение:

1) 30 : 6 = 5 –рейсов;

2) P(A)=1/5 = 0,2.

Ответ: 0,2.

Пример 5. На фабрике керамической посуды 10% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 80% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Результат округлите до сотых.

Решение:

Пусть есть 100 тарелок, тогда с браком – 10 тарелок, без брака – 90 тарелок (они точно идут в продажу).

При проверке качества: 100 0,8 = 80 тарелок с дефектом.

Без дефектов: 100 – 80 = 20;

20·0,1 = 2 тарелки также идут в продажу;

всего в продажу поступает 92 тарелки, вероятность равна: 90/92 = 45/46 ≈ 0,98.

Задачи для самоконтроля

1) В кармане у Саши было четыре конфеты — «Коровка», «Мишка», «Ласточка» и «Василёк», а также ключи от квартиры. Вынимая ключи, Саша случайно выронил из кармана одну конфету. Найдите вероятность того, что потерялась конфета «Мишка».
2) На конференцию приехали 5 ученых из Швеции, 7 из Италии и 4 из Чехии. Каждый из них делает на конференции один доклад. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что двенадцатым окажется доклад ученого из Чехии.
3) Конкурс исполнителей проводится в 5 дней. Всего заявлено 80 выступлений — по одному от каждой страны. В первый день 8 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса?

2.3. Геометрическая теория вероятностей

На практике очень часто число возможных исходов испытаний бесконечно. В таких случаях классическое определение вероятности неприменимо. В этом случае пользуются геометрической теорией вероятностей.

Вероятность события A есть отношение меры g (длины, площади, объема и т.д.) к мере G пространства элементарных событий.

Пространство элементарных событий – это множество, содержащее все возможные результаты опыта, которые взаимно исключают друг друга.

Пример 6. В круг радиуса R наудачу брошена точка. Найдите вероятность того, что эта точка окажется внутри данного вписанного правильного треугольника.

Решение. Искомая вероятность равна отношению площади треугольника к площади круга: $\frac{(R\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}$: $пR^2$= $\frac{3\sqrt{3}}{4п}$ ≈ 0,4137

Ответ: 0,4137.

Пример 7. Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали идти. Найдите вероятность того, что часовая стрелка остановилась, достигнув отметки 10, но не дойдя до отметки 1.

Решение: На циферблате между десятью часами и одним часом три часовых деления. Всего на циферблате 12 часовых делений. Поэтому искомая вероятность равна: $\frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

Ответ: 0,25.

Задачи для самоконтроля

1) Точка брошена в круг радиуса R. Найдите вероятность того, что она попадает внутрь данного вписанного квадрата.
2) Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент остановились. Найдите вероятность того, что часовая стрелка остановилась, достигнув отметки 3, но не дойдя до отметки 6.

2.4. Несовместные события. Теорема о сложении вероятностей.

События называют *несовместными*, если они не могут произойти одновременно в опыте, или, как говорят, одно из событий исключает другое. Например, при бросании двух кубиков выпадение нечетной суммы очков и равных чисел на обоих кубиках.

Теорема. Вероятность суммы 2 *несовместных* событий A и B (появления хотя бы одного события) равна сумме вероятностей этих событий: $P(A+B) = P(A)+P(B)$

- ✓ Сумма вероятностей противоположных событий A и $\overline{A}$ равна 1.

Пример 8. На экзамене по геометрии школьнику достаётся один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Вписанная окружность», равна 0,2. Вероятность того, что это вопрос на тему «Параллелограмм», равна 0,15. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Решение: События вопрос на «Вписанную окружность» и вопрос на «Параллелограмм» несовместные, поэтому вероятность выпадения одного из них равна сумме вероятностей:

$P(A+B)=P(A)+P(B)=0{,}2 + 0{,}15=0{,}35$

Ответ: 0,35.

Пример 9. В корзине лежат 100 пронумерованных шариков. Какова вероятность, что не вынут шарик под номером 6?

Решение: Вынут шарик под номером 6 – событие A, $P(A)=0{,}01$; не вынут шарик под номером 6 – событие $\overline{A}$.

$P(A)+P(\overline{A})=1$

$P(\overline{A})=1-P(A)= 1-0{,}01=0{,}99$

Ответ: 0,99.

Пример 10. При изготовлении подшипников диаметром 67 мм вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного не больше, чем на 0,01 мм, равна 0,965. Найдите вероятность того, что случайный подшипник будет иметь диаметр меньше чем 66,99 мм или больше чем 67,01 мм.

*Решение:*Диаметр подшипника будет лежать в пределах от 66,99 до 67,01 мм – событие A, $P(A)=0{,}965$;
диаметр подшипника меньше чем 66,99мм или больше чем 67,01мм – событие $\overline{A}$
$P(A)+P(\overline{A})=1$

$P(\overline{A})=1-P(A)= 1-0{,}965=0{,}035$

Ответ: 0,035.

Пример 11.Вероятность того, что на тесте по истории учащийся Т. Верно решит больше 8 задач равна 0,76. Вероятность того, что Т. верно решит больше 7 задач равна 0,88. Найдите вероятность того, что Т. верно решит ровно 8 задач.

Решение: Больше 7 задач – событие A; больше 8 задач – событие B; ровно 8 задач – событие C. B и C –несовместные события, значит $P(A) = P(B) + P(C)$

$P(C) = P(A) – P(B) = 0{,}88 – 0{,}76 = 0{,}12$

Ответ: 0,12.

Задачи для самоконтроля

1) На экзамене по геометрии школьнику достаётся один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Внешние углы», равна 0,35. Вероятность того, что это вопрос на тему «Тригонометрия», равна 0,25. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.
2) При изготовлении подшипников диаметром 61 мм вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного меньше чем на 0,01 мм, равна 0,976. Найдите вероятность того, что случайный подшипник будет иметь диаметр меньше чем 60,99 мм или больше чем 61,01 мм.
3) Вероятность того, что новый тостер прослужит больше года, равна 0,94. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,8. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

2.5. Совместные события. Теорема о сложении вероятностей.

Событие называют *совместными*, если в опыте наступление одного из них не исключает наступления другого. Например, при бросании 2 кубиков на одном кубике выпадет 5 очков, на втором кубике – 3 очка.

Теорема.Вероятность суммы совместных событий А и В (появления хотя бы одного события) равна сумме их вероятностей без вероятности их совместного наступления:

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

Для трех совместных событий формула приобретает вид: $P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$.

Пример 12. Лампочка в левой комнате некоторого блока в общежитии перегорает в среднем 1 раз в 20 включений. Лампочка в правой комнате этого блока перегорает в среднем 1 раз в 50 включений. Вероятность того, что при одновременном включении обеих лампочек обе перегорят составляет 0,01. Какова вероятность того, что при одновременном включении ни одна из лампочек не перегорит?

Решение:

1) Найдем вероятность того, что при одновременном включении хотя бы одна из этих лампочек перегорит:

$1/20+1/50-0,01=0,05+0,02-0,01=0,06$;

2) Найдем вероятность того, что не перегорит ни одна лампочка:

$1-0,06=0,94$

Ответ: 0,94.

Пример 13. Школьнику надо сдать зачет по математике. В каждом билете – по два вопроса. Всего 25 билетов. Из них 5 билетов школьник вообще не учил. В каждом из оставшихся 20 билетов он хотя бы один вопрос выучил, причем в 18 билетах школьник выучил первый вопрос и в 15 билетах – второй вопрос. Школьник может получить удовлетворительную оценку, если вытащит такой билет, оба вопроса которого он знает. Какова вероятность того, что школьник сдаст зачет, если он первый тянет билет?

Решение: Школьник вытянет билет, первый вопрос которого он знает – событие A;

P(A)=18/25

школьник вытянет билет, второй вопрос которого он знает – событие B;

P(B)=15/25

школьник знает хотя бы 1 вопрос из 20 – событие A+B; P(A+B)=20/25.

P(A+B)=P(A)+P(B)−P(AB)

P(AB)=P(A)+P(B)-P(A+B)=18/25+15/25-20/25=13/25=0,52

Ответ: 0,52.

Задачи для самоконтроля

1) В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе,

равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

2) Прибор, состоящий из двух блоков, выходит из строя, если выходят из строя оба блока. Вероятность безотказной работы за определенный промежуток времени первого блока составляет 0,9, второго – 0,8, обоих блоков – 0,75. Найти вероятность безотказной работы прибора в течение указанного промежутка.
3) Студент сдает экзамен по философии. В каждом билете – по два вопроса. Всего 10 билетов. Из них 3 билета студент вообще не учил. В каждом из оставшихся 7 билетов он хотя бы один вопрос выучил, причем в 6 билетах школьник выучил первый вопрос и в 9 билетах – второй вопрос. Студент может получить удовлетворительную оценку, если вытащит такой билет, оба вопроса которого он знает. Какова вероятность того, что школьник сдаст зачет, если он первый тянет билет?

2.6. Независимые события. Теорема об умножении вероятностей.

События называют *независимыми*, если в опыте наступление одного из них не изменяет вероятность наступления другого. Например, в цехе работают 2 автоматические линии, которые не взаимосвязаны между собой. Если одна из двух линий остановится, это никак не повлияет на роту другой линии.

Теорема. Вероятность произведения (совместного появления) независимых событий А и В равна произведению вероятностей этих событий: $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$

- ✓ Вероятность появления хотя бы одного события из попарно независимых событий равна: $P(C)=1-P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})$

Пример 14. Вероятность того, что потребитель увидит рекламу определенного продукта по телевидению, равна 0,06. Вероятность того, что потребитель увидит рекламу того же продукта на рекламном стенде, равна 0,08. Чему равна вероятность того, что потребитель увидит: а) обе рекламы; б) хотя бы одну рекламу.

Решенеие: Потребитель увидит рекламу по телевидению – событие А; $P(A)=0,06$
потребитель увидит рекламу на стенде – событие В; $P(B)=0,08$
потребитель увидит обе рекламы – событие АВ;
потребитель увидит хотя бы одну рекламу – событие С

а) $P(AB)=0,06\cdot 0,08=0,0048$

б)$P(C)=1-P(\overline{AB})=1-P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=1-(1-0,06)\cdot(1-0,08)=$
$=1-0,94\cdot 0,92=0,1352$

Ответ:а)0,0048; б)0,1352

Пример 15. Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,06. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две таких батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.

Решение:

1)1 – 0,06 = 0,94 – исправная батарейка;

2) 0,94*0,94 = 0,8836 – обе исправные

Ответ: 0,8836.

Пример 16. Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые три раза попал в мишени, а последние два промахнулся. Результат округлите до сотых.

Решение: Поскольку биатлонист попадает в мишени с вероятностью 0,8, он промахивается с вероятностью $1 - 0{,}8 = 0{,}2$. Вероятность события «попал, попал, попал, промахнулся, промахнулся» равна: $0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}02048 \approx 0{,}02$

Ответ: 0,02.

Пример 17. При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,4, а при каждом последующем — 0,6. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,98?

Решение:

Первый выстрел 0,4 (попал); (1-0,4=0,6 – не попал при 1 выстреле)

второй выстрел 0,6 · 0,6 = 0,36 (мимо-попал), сумма 0,4+0,36=0,76; (1-0,6=0,4 – не попал при 2 выстреле и последующих)

третий выстрел 0,6 · 0,4 · 0,6 = 0,144 (мимо-мимо-попал), сумма 0,76+0,144=0,904;

четвертый выстрел 0,6 · 0,4 · 0,4 · 0,6 =0,0576(мимо-мимо-мимо-попал), сумма 0,9616;

пятый выстрел 0,6 · 0,4 · 0,4 · 0,4 · 0,6 =0,02304(мимо-мимо-мимо-попал), сумма 0,98464 > 0,98

Ответ: 5 выстрелов.

Пример 18. Помещение освещается фонарем с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,3. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Решение: Найдем вероятность того, что перегорят обе лампы: 0,3·0,3 = 0,09. Событие, состоящее в том, что не перегорит хотя бы одна лампа, противоположное: $P(\overline{A})=1-P(A)=1-0{,}09=0{,}91$

Ответ: 0,91.

Задачи для самоконтроля

1) В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,3. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно (считайте, что клиенты заходят независимо друг от друга).
2) Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,2. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две такие батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.
3) Биатлонист 9 раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,85. Найдите вероятность того, что биатлонист первые 4 раза попал в мишени, а последние пять промахнулся. Результат округлите до сотых.
4) При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,3, а при каждом последующем — 0,7. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,98?
5) Помещение освещается фонарём с тремя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,21. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит

2.7. Зависимые события. Теорема об умножении вероятностей.

События называют *зависимыми*, если в опыте наступление одного из них изменяет вероятность наступления другого. Например, в цехе работают 2 автоматические линии, которые взаимосвязаны между собой. Если одна из двух линий остановится, то и остановится вторая.

Теорема. Вероятность произведения зависимых событий А и В равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность второго**:** $P(AB) = P(A)P_A(B)=P(B)P_B(A)$.

Условной вероятностью (P_A (B)) называют вероятность события В, вычисленную в предположении, что событие А уже наступило.

Для трех событий формула имеет вид: $P(ABC)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{AB}(C)$

Пример 19. В урне 6 шаров – 2 белых и 4 черных. Без возвращения выбираем два шара. Найти вероятность того, что оба шара белые.

Решение: Первый шар белый – событие А; второй шар белый – событие В

$P(A)=2/6=1/3$

После того, как вынули 1 шар белый, остается 5 шаров и среди них 1 белый. Получаем: $P_A(B)=1/5$

По теореме умножения зависимых событий: $P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)=1/3\cdot 1/5=1/15$

Ответ: 1/15.

Задачи для самоконтроля

1) У сборщика имеется 3 конусных и 7 эллиптических валиков. Сборщик взял один валик, а затем второй. Найти вероятность того, что первый из взятых валиков — конусный, а второй — эллиптический.
2) В урне 5 белых, 4 черных и 3 синих шара. Каждое испытание состоит в том, что наудачу извлекают один шар, не возвращая его обратно. Найти вероятность того, что при первом испытании появится белый шар (событие А), при втором — черный (событие В) и при третьем—синий (событие С).

2.8. Сложение и умножение вероятностей.

Разберем задачи, в которых применяют обе теоремы: сложения вероятностей и умножения вероятностей.

Пример 20. С первого станка на сборку поступает 40%, со второго – 30% и с третьего – 30% всех деталей. Вероятности изготовления бракованной детали равны для каждого станка соответственно 0,01, 0,03 и 0,05. Найти вероятность того, что наудачу взятая деталь, поступившая на сборку, бракованная.

Решение:

Деталь изготовлена на 1 станке – событие A_1, $P(A_1)=40/100=0,4$; деталь изготовлена на 2 станке – событие A_2, $P(A_2)=30/100=0,3$; деталь изготовлена на 3 станке – событие A_3, $P(A_3)=30/100=0,3$; деталь, изготовленная на 1 станке, бракованная – событие B_1, $P_{A1}(B_1)=0,01$;

деталь, изготовленная на 2 станке, бракованная – событие B_2, $P_{A2}(B_2)=0,03$; деталь, изготовленная на 3 станке, бракованная – событие B_3, $P_{A3}(B_3)=0,05$;

наудачу взятая деталь, поступившая на сборку, бракованная – событие B,

$P(B)=P(A_1B_1)+P(A_2B_2)+P(A_3B_3)$ (теорема сложения несовместных событий);

$P(B)=P(A_1)\cdot P_{A1}(B_1)+P(A_2)\cdot P_{A2}(B_2)+P(A_3)\cdot P_{A3}(B_3)$

(теорема умножения вероятностей зависимых событий)

$P(B)=0,4\cdot 0,01+0,3\cdot 0,03+0,3\cdot 0,05=0,028$

Ответ: 0,028.

Пример 21. Чтобы поступить в институт на специальность «Лингвистика», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность «Коммерция», нужно набрать не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и обществознание.

Вероятность того, что абитуриент *З*. получит не менее 70 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку — 0,8, по иностранному языку — 0,7 и по обществознанию — 0,5. Найдите вероятность того, что *З*. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

Решение:

Вероятность успешно сдать экзамены на лингвистику: 0,6 · 0,8 · 0,7 = 0,336 (теорема об умножении независимых событий);

вероятность успешно сдать экзамены на коммерцию: 0,6 · 0,8 · 0,5 = 0,24 (теорема об умножении независимых событий);

вероятность успешно сдать экзамены и на «Лингвистику», и на «Коммерцию»: 0,6 · 0,8 · 0,7 · 0,5 = 0,168 (теорема об умножении независимых событий).

Успешная сдача экзаменов на «Лингвистику» и на «Коммерцию» — события совместные, поэтому по теореме о сложении вероятностей совместных событий поступить хотя бы на одну из этих специальностей абитуриент может с вероятностью: 0,336 + 0,24 − 0,168 = 0,408

Ответ: 0,408.

Задачи для самоконтроля

1) Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей — 1 очко, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,4.
2) Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 25 % этих стекол, вторая – 75 %. Первая фабрика выпускает 4 % бракованных стекол, а вторая – 2%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Дополнительные задачи

1) Для выяснения качества семян было отобрано и высеяно в лабораторных условиях 1000 штук. 980 семян дали нормальный всход. Найдите частоту нормального всхода семян.
2) В некотором городе из 4000 появившихся на свет младенцев 1940 девочек. Найдите частоту рождения мальчиков в этом городе. Результат округлите до тысячных.
3) Французский естествоиспытатель Бюффон (XVIII) бросил монету 4040 раз, и при этом герб выпал в 2048 случаях. Найдите частоту выпадения герба в данной серии испытаний. Результат округлите до десятитысячных.

4) Вероятность того, что новый пылесос в течение года поступит в гарантийный ремонт, равна 0,093. В некотором городе из 1000 проданных пылесосов в течение года в гарантийную мастерскую поступило 97 штук. На сколько отличается частота события «гарантийный ремонт» от его вероятности в этом городе?
5) На семинар приехали 4 ученых из Норвегии, 6 из России и 6 из Великобритании. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что вторым окажется доклад ученого из Норвегии.
6) В сборнике билетов по биологии всего 55 билетов, в 11 из них встречается вопрос по ботанике. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по ботанике.
7) Маша, Тимур, Диана, Костя и Антон бросили жребий — кому начинать игру. Найдите вероятность того, что начинать игру должен будет не Антон.
8) Из 1200 чистых компакт-дисков в среднем 72 непригодны для записи. Какова вероятность того, что случайно выбранный диск пригоден для записи?
9) На клавиатуре телефона 10 цифр от 0 до 9. Какова вероятность того, что нажата четная цифра?
10) На рок-фестивале выступают группы по одной от каждой из заявленных стран: Дания, Швеция, Норвегия. Порядок выступления определяется жребием. Какова вероятность того, что группа из Дании будет выступать после группы из Швеции и Норвегии? Результат округлите до сотых.

11) На олимпиаде по русскому языку участников рассаживают по трём аудиториям. В первых двух аудиториях сажают по 110 человек, оставшихся проводят в запасную аудиторию в другом корпусе. При подсчёте выяснилось, что всего было 400 участников. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.
12) В классе 16 учащийся, среди них два друга — Вадим и Олег. Класс случайным образом разбивают на 4 равные группы. Найдите вероятность того, что Вадим и Олег окажутся в одной группе.
13) В соревнованиях по толканию ядра участвуют 3 спортсмена из Чехии, 4 спортсмена из Словакии, 4 спортсмена из Австрии и 9 — из Швейцарии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Австрии.
14) Перед началом первого тура чемпионата по бадминтону участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 бадминтонистов, среди которых 10 участников из России, в том числе Руслан Орлов. Найдите вероятность того, что в первом туре Руслан Орлов будет играть с каким-либо бадминтонистом из России?
15) В среднем из 500 садовых насосов, поступивших в продажу, 4 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.
16) На борту самолёта 28 мест рядом с запасными выходами и 16 мест за перегородками, разделяющими салоны. Остальные места неудобны для пассажира высокого роста. Пассажир Л. высокого роста. Найдите вероятность того, что на регистрации при случайном

выборе места пассажиру Л. достанется удобное место, если всего в самолёте 400 мест.

17) В фирме такси в наличии 50 легковых автомобилей; 27 из них чёрные с жёлтыми надписями на бортах, остальные – жёлтые с чёрными надписями. Найдите вероятность того, что на случайный вызов приедет машина жёлтого цвета с чёрными надписями.
18) В чемпионате мира участвуют 16 команд. С помощью жребия их нужно разделить на четыре группы по четыре команды в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп: 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4. Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда России окажется во второй группе?
19) Научная конференция проводится в 4 дня. Всего запланировано 60 докладов — первые два дня по 18 докладов, остальные распределены поровну между третьим и четвертым днями. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?
20) В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что наступит исход ОР (в первый раз выпадает орёл, во второй — решка).
21) На чемпионате по прыжкам в воду выступают 40 спортсменов, среди них 6 прыгунов из Голландии и 2 прыгуна из Аргентины. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что четырнадцатым будет выступать прыгун из Аргентины.

22) На фабрике керамической посуды 20% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 50% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.
23) Родительский комитет закупил 40 пазлов для подарков детям на окончание учебного года, из них 14 с видами природы и 26 с историческими достопримечательностями. Подарки распределяются случайным образом. Найдите вероятность того, что Пете достанется пазл с видом природы.
24) На тарелке 15 пирожков: 4 с мясом, 9 с капустой и 2 с вишней. Катя наугад выбирает один пирожок. Найдите вероятность того, что он окажется с капустой.
25) Аня с папой решили покататься на колесе обозрения. Всего на колесе 22 кабинок, из них 5 – желтые, 6 – белые, остальные – красные. Кабинки по очереди подходят к платформе для посадки. Найдите вероятность того, что Аня прокатится в красной кабинке.
26) В каждой двадцать пятой банке кофе согласно условиям акции есть приз. Призы распределены по банкам случайно. Коля покупает банку кофе в надежде выиграть приз. Найдите вероятность того, что Коля не найдет приз в своей банке.
27) Валя выбирает случайное трехзначное число. Найдите вероятность того, что оно делится на 51.
28) Даша дважды бросает игральный кубик. В сумме у нее выпало 8 очков. Найдите вероятность того, что при одном из бросков выпало 2 очка.

29) В кармане у Пети было 4 монеты по рублю и 2 монеты по два рубля. Петя, не глядя, переложил какие-то 3 монеты в другой карман. Найдите вероятность того, что обе двухрублёвые монеты лежат в одном кармане.
30) На экзамене по геометрии школьнику достаётся один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Тригонометрия», равна 0,1. Вероятность того, что это вопрос на тему «Вписанная окружность», равна 0,3. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.
31) Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, равна 0,97. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,89. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.
32) Вероятность того, что на тесте по биологии учащийся О. верно решит больше 11 задач, равна 0,67. Вероятность того, что О. верно решит больше 10 задач, равна 0,74. Найдите вероятность того, что О. верно решит ровно 11 задач.
33) Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 18 пассажиров, равна 0,82. Вероятность того, что окажется меньше 10 пассажиров, равна 0,51. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 10 до 17.
34) При изготовлении подшипников диаметром 68 мм вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного меньше чем на 0,01 мм, равна 0,968. Найдите вероятность того, что случайный

подшипник будет иметь диаметр меньше чем 67,99 мм или больше чем 68,01 мм.

35) В торговом центре два одинаковых автомата продают жвачку. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится жвачка, равна 0,25. Вероятность того, что жвачка закончится в обоих автоматах, равна 0,2. Найдите вероятность того, что к концу дня жвачка останется в обоих автоматах.
36) В аквариуме плавает 100 рыбок. Известно, что из них 17 золотых, 4 исполняют желания. При этом золотых рыбок, которые исполняют желания в аквариуме 3. Покупатель хочет приобрести золотую рыбку, которая исполняет желания (как в сказке). Найдите вероятность того, что выбранная наугад рыбка будет соответствовать хотя бы одному требованию покупателя.
37) Известно, что в множестве М ровно 100 натуральных чисел, из которых 10 делятся на 2, 15 делятся на 3, 1 делится на 6. Какова вероятность наугад выбрать число из М, которое делится хотя бы на одно из чисел 2 и 3?
38) В классе учится 20 человек, из которых 4 занимаются плаванием, 5 занимаются шахматами. Известно, что и плаванием, и шахматами занимаются 2 ученика этого класса. Какова вероятность того, что выбранный наугад ученик этого класса занимается по крайней мере одним из этих видов спорта?
39) Вероятность того, что маленький Миша заплачет, увидев в зоопарке медведя, составляет 0,3. Вероятность того, что маленькая Маша заплачет, увидев в зоопарке медведя, составляет 0,4. Вероятность того, что Миша и Маша вместе заплачут, увидев в зоопарке

медведя, составляет 0,15. Какова вероятность того, что по крайней мере один из них заплачет, увидев в зоопарке медведя?

40) Вероятность того, что Артем получит пятерку по математике за ответ у доски равна 0,97. Вероятность того, что Артем получит пятерку по русскому языку за ответ у доски равна 0,9. Вероятность получить пятерку по обоим предметам оказалась равной 0,89. Какова вероятность того, что Артем за ответы у доски по математике и русскому языку не получит ни одной пятерки?

41) Боря выступает на соревнованиях по спортивной гимнастике. Вероятность того, что он потянет ногу, равна 0,1, а вероятность того, что он вывихнет плечо, равна 0,05. Обычно, даже получив повреждения, Боря не подает виду, так что вероятность потянуть ногу и вывихнуть плечо за одни соревнования составляет 0,04. Какова вероятность того, что соревнования пройдут для Бори без таких травм?

42) Ваня бьет по мячу. Рядом стоит 10-этажный дом. Вероятность события “Ваня выбил окно на этаже, номер которого четный” равна 0,01. Вероятность события “Ваня выбил окно на этаже, номер которого делится на 3” равна 0,02. Вероятность того, что Ваня выбьет окно на 6 этаже, равна 0,005. Какова вероятность того, что окна на четных этажах, как и окна на этажах с номерами, кратными 3, не пострадают?

43) Если шахматист А. играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,52. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,3. Шахматисты А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

44) В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,6. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно (считайте, что клиенты заходят независимо друг от друга).
45) Биатлонист 6 раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,5. Найдите вероятность того, что биатлонист первые 2 раза попал в мишени, а последние четыре промахнулся. Результат округлите до сотых.
46) Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,04. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две таких батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.
47) Перед началом волейбольного матча капитаны команд тянут честный жребий, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Статор» по очереди играет с командами «Ротор», «Мотор» и «Стартер». Найдите вероятность того, что «Статор» будет начинать только первую и последнюю игры.
48) По отзывам покупателей Иван Иванович оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,8. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,9. Иван Иванович заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.
49) Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,17. Найдите

вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

50) При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,6, а при каждом последующем – 0,8. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,99?

51) В классе 7 мальчиков и 14 девочек. 1 сентября случайным образом определяют двух дежурных на 2 сентября, которые должны приготовить класс к занятиям. Найдите вероятность того, что будут дежурить два мальчика.

52) В урне 4 белых и 7 черных шаров. Из урны наудачу один за другим извлекают два шара, не возвращая их обратно. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

53) В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,12 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

54) Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Химик» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих играх «Химик» выиграет жребий ровно два раза.

55) Чтобы поступить в институт на специальность «Международные отношения», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 63 баллов

по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность «Коммерция», нужно набрать не менее 63 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и обществознание. Вероятность того, что абитуриент А. получит не менее 63 баллов по математике, равна 0,5, по русскому языку — 0,8, по иностранному языку — 0,6 и по обществознанию — 0,9. Найдите вероятность того, что А. сможет поступить на одну из двух упомянутых специальностей.

56) Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 70% этих стекол, вторая – 30%. Первая фабрика выпускает 5% бракованных стекол, а вторая – 4%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

57) Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из не пристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,2. На столе лежит 10 револьверов, из них только 4 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.

58) Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,01. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,95. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную

батарейку, равна 0,04. Найдите вероятность того, что случайно выбранная из упаковки батарейка будет забракована.

59) Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 5% яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства — 30% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 15% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

60) Стрелок при каждом выстреле поражает мишень с вероятностью 0,3, независимо от результатов предыдущих выстрелов. Какова вероятность того, что он поразит мишень, сделав не более 3 выстрелов?

61) Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется положительным. У больных гепатитом пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,9. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,01. Известно, что 5% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

62) В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,8 погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня 3 июля, погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 6 июля в Волшебной стране будет отличная погода.

63) В некоторой местности утро в мае бывает либо ясным, либо облачным. Наблюдения показали: Если майское утро ясное, то вероятность дождя в этот день 0,2. Если майское утро облачное, то вероятность дождя в течение дня равна 0,6. Вероятность того, что утро в мае будет облачным, равна 0,4. Найдите вероятность того, что в случайно взятый майский день дождя не будет

Ответы

Раздел 1. Элементы комбинаторики.

1.1. Перестановки

1. 24 способа. **2.** 720 чисел. **3.** 72 способа.

1.2. Размещения

1. 303600 способов. **2.** 1680 способов

3. $A_{10}^{7} - A_{9}^{6} = \frac{10!}{(10-7)!} - \frac{9!}{(9-6)!} = \frac{10!}{3!} - \frac{9!}{3!} =$

$= \frac{3!\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{3!} - \frac{3!\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}{3!} = 4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10 - 4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9=$

$=604800-60480=$**544320 способов**.

1.3. Сочетания

1. 56 способов.

2. 1) Выберем студентов на места с медалью, т. е. 3 абитуриентов из 5:

$C_{5}^{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!\cdot2!}=10.$

2) Выберем студентов на места без медали, т. е. 7 абитуриентов из 9:

$C_{9}^{7} = \frac{9!}{7!(9-7)!} = \frac{9!}{7!\cdot2!} =36.$

3) Осталось 2 абитуриента с медалью, 2 абитуриента без медали и 3 свободных места, которые, по условию, могут занять любые из четырех оставшихся человек. Это может быть сделано 2 вариантами:

- 1 абитуриент с медалью и 2 абитуриента без медали: выбираем абитуриента с медалью $\mathbf{C}_2^1$=2 способами
- 1 абитуриент без медали и 2 абитуриента с медалью: выбираем абитуриента без медали $\mathbf{C}_2^1$=2 способами

Получаем: 10·36(2 + 2) = **1440 способов**.

3. В подгруппу должно входить не менее 2-ух человек, т. е. 2+7, 3+6, 4+5.

- из 2-х человек: $\mathbf{C}_9^2 = \frac{9!}{2!(9-2)!} - \frac{9!}{2!\cdot 7!} = \frac{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}{2\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}$ =36.
- из 3-х человек: $\mathbf{C}_9^3 = \frac{9!}{3!(9-3)!} - \frac{9!}{3!\cdot 6!} = \frac{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}{2\cdot3\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}$ =84.
- из 4-х человек: $\mathbf{C}_9^4 = \frac{9!}{4!(9-4\ )!} - \frac{9!}{4!\cdot 5!} = \frac{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}{2\cdot3\cdot4\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}$ =126.

Применим правило сложения: $\mathbf{N}=\mathbf{C}_9^2+\mathbf{C}_9^3+\mathbf{C}_9^4$ =36+84+126=**246 способов**.

1.4. Правила комбинаторики

1. 1) 5·3=15 – дороги из A в D;

2) 4·6=24 – дороги из A в D;

3) 15+24=**39 маршрутов**.

2. 576 способов.

3. Возможны три разных случая:

- чашка+блюдце – 5·3=15 способов;
- блюдце+ложка – 3·4=12 способов;

- чашка+ложка – 5·4=20 способов;

Всего: 15+12+20=**47 способов**.

1.5. Непосредственные подсчеты

1. 6 вариантов. **2.** 12 вариантов. **3.** 105 партий.

Дополнительные задачи.

1. а) 120; б) 120; в) 362880; г) 5040. **2.** 6 перестановок.

3. 4032 способа. **4.** 24 способа. **5.** 6!·5=3600 способов.

6. 1960 способов. **7.** 3432 комиссии. **8.** 1260 способов.

9. 1271 способ. **10.** 120 способов. **11.** 20 словарей.

12. 120 способов. **13.** 120·360=43200 способов. **14.** 4896 способов.

15. 12650 способов. **16.** $\mathbf{C_{16}^{4}} \cdot \mathbf{C_{12}^{3}}$=400400 способов. **17.** 8 вар.

18. 9+7+3–6=13 человек. **19.** $\mathbf{C_{15}^{3}} \cdot \mathbf{C_{9}^{2}}$=455·36=16380 способов.

20. 1) 20·19=380 способов – два изделия 1-го сорта;

2) 30·29=870 способов – два изделия 2-го сорта;

3)380 + 870 = **1250 способов.**

21. 5·3·4=60 способов. **22.** 12 способов.

23. Можно купить либо по экземпляру каждого романа, либо том, содержащий два романа и экземпляр третьего: 7·4·5+5·4+7·7=140+20+49=209 способов.

24. 2·3·2=12 видов. **25.** 518400 способов. **26.** 28 способов.

27. 6 способов. **28.** 25 чисел. 29. 6 способов. **30.** 16 пар. **31.** 9 вар. **32.** 6 вар. 33. 6 вар. **34.** 6 партий. **35.** 6 способов.

Раздел 2. Элементы теории вероятностей.

2.1. Частота событий

1. 0,515. **2.** 0,5005.

2.2. Классическая теория вероятностей

1. 0,25. **2.** 0,25. **3.** 0,225.

2.3. Геометрическая теория вероятностей

1. Искомая вероятность равна отношению площади квадрата к площади круга: $2R^2:\pi R^2=2:\pi\approx$**0,637**.

2. 0,25.

2.4. Несовместные события. Теорема о сложении вероятностей.

1. 0,6.

2. Диаметр подшипника будет лежать в пределах от 60,99 до 61,01 мм– событие А, P(A)=0,976;

диаметр подшипника меньше чем 60,99мм или больше чем 61,01мм – событие $\overline{A}$

$P(A)+P(\overline{A})=1$

$P(\overline{A})=1-P(A)=1-0{,}976=$**0,024**.

3. Пусть А – «тостер прослужит больше года, но меньше двух лет»;

В – «тостер прослужит больше двух лет», P(B)=0,8;

С – «тостер прослужит ровно два года», P(C)=0;

А + В + С – «тостер прослужит больше года».

$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) = P(A) + P(B)$,

$0{,}94 = P(A) + 0{,}8$

$P(A) = 0{,}94 - 0{,}8 =$ **0,14.**

2.5. Совместные события. Теорема о сложении вероятностей.

1. Пусть A – кофе закончится в первом автомате, $P(A)=0{,}3$;

B – кофе закончится во втором автомате, $P(B)=0{,}3$;

$A\cdot B$ – кофе закончится в обоих автоматах, $P(A\cdot B)=0{,}12$;

$A + B$ – кофе закончится хотя бы в одном автомате.

$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A\cdot B) = 0{,}3 + 0{,}3 - 0{,}12 = 0{,}48$

$P(A)+P(\overline{A})=1$

$P(\overline{A})=1- P(A)=1 - 0{,}48=$**0,52**.

2. Пусть A – «первый блок работает безотказно в течение определенного промежутка времени», $P(A)=0{,}9$;

B – «второй блок работает безотказно в течение определенного промежутка времени», $P(B)=0{,}8$;

AB – «оба блока работают безотказно в течение определенного промежутка времени», $P(AB)=0{,}75$;

C – «прибор работает безотказно в течение определенного промежутка времени», $C = A + B$.

$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}9 + 0{,}8 - 0{,}75 =$ **0,95**.

3. 0,8.

2.6. Независимые события. Теорема об умножении вероятностей.

1. 0,027. **2.** 0,06. **3.** 0,00. **4.** 4 выстрела. **5.** 0,990739.

2.7. Зависимые события. Теорема об умножении вероятностей.

1. $\frac{7}{30}$≈0,23. **2.** $\frac{1}{22}$≈0,045.

2.8. Сложение и умножение вероятностей.

1. Команда может получить не меньше 4 очков в двух играх тремя способами: 3+1 (победа– ничья), 1+3 (ничья – победа), 3+3 (победа – победа).

Вероятность победы – 0,4;

вероятность поражения – 0,4;

вероятность ничьей – 1-0,4-0,4=0,2.

Р=0,4·0,2+0,2·0,4+0,4·0,4=**0,32**.

2. Вероятность того, что стекло сделано на первой фабрике, и оно бракованное: 0,25 · 0,04 = 0,01.

Вероятность того, что стекло сделано на второй фабрике, и оно бракованное: 0,75 · 0,02 = 0,015.

Р= 0,01 + 0,015 = **0,025**.

Дополнительные задачи

1. 0,98. **2.** 0,515. **3.** 0,5069. **4.** 0,097-0,093=0,004. **5.** 0,25. **6.** 0,2.

7. 0,8. **8.** 0,94. **9.** 0,5. **10.** ≈0,33. **11.** 0,45. **12.** 0,2. **13.** 0,2.

14. В первом туре Руслан Орлов может сыграть с $26-1=25$ бадминтонистами, из которых $10-1=9$ из России. Значит, $P=\frac{9}{25}=$ =**0,36**.

15. 0,992. **16.** 0,11. **17.** 0,46. **18.** 0,25. **19.** 0,2. **20.** 0,25. **21.** 0,05.

22. Пусть у нас есть 100 тарелок. Тогда с браком – 20 штук, без брака – 80 штук (они точно идут в продажу).

При проверке качества: 100·0,5 = 50 тарелок с дефектом.

Без дефектов 100 – 50 = 50; 50·0,1 = 5 тарелок также идут в продажу. Всего в продажу поступает 85 тарелок. Вероятность равна: $\frac{80}{85}$ ≈ 0,94.

23. 0,35. **24.** 0,6. **25.** 0,5. **26**. 0,96. **27.** $P = \frac{18}{900} = 0{,}02$. **28.** 0,4.

29. $P = \frac{8}{20} = 0{,}4$. **30.** 0,4. **31.** 0,08. **32.** 0,07. **33.** 0,31. **34.** 0,032.

35. 0,3. **36.** 0,18. **37.** 0,24. **38.** 0,35. **39.** 0,55. **40.** 1-0,98=**0,02**.

41. 1-0,89=**0,11**. **42.** 1-0,025=**0,975**. **43.** 0,156. **44.** 0,216. **45.** 0,02

46. 0,9216. **47.** 0,125. **48.** 0,02. **49.** 0,9711. **50.** 4 выстрела. **51.** 0,1.

52. 4 + 7 = 11 шаров – всего;

Пусть А – первый шар будет белым, В – второй шар будет белым; $P(A) = \frac{4}{11}$;

пусть белый шар извлекли, тогда в урне останется 10 шаров, среди которых 3 белых: $P_A(B) = \frac{3}{10}$.

По теореме умножения вероятностей зависимых событий: $P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{4 \cdot 3}{11 \cdot 10} = \frac{6}{55} \approx \approx$ **0,1(09)**.

53. 0,9856. **54.** 0,375. **55.** 0,384. **56.** 0,047.

57. Джон может промахнуться при двух несовместных событиях:

- событие А – Джон взял пристрелянный револьвер и промахнулся;
- событие В – Джон взял непристрелянный револьвер и промахнулся.

Вероятность события А равна произведению вероятности выбора пристрелянного револьвера $\frac{4}{10}$ на вероятность промаха из пристрелянного револьвера 1-0,9=0,1

$P(A) = \frac{4}{10} \cdot 0{,}1 = 0{,}04$;

вероятность события В равна произведению вероятности выбора непристрелянного револьвера $\frac{6}{10}$ на вероятность промаха из него 1-0,2=0,8

$P(B) = \frac{6}{10} \cdot 0{,}8 = 0{,}48$

Таким образом, вероятность того, что Джон промахнется, равна P(A)+P(B)=0,04+0,48=**0,52**.

58. Выделим два несовместных исхода, при которых система контроля бракует батарейку:

- событие А – батарейка неисправна, и она бракуется системой; P(A)=0,01·0,95=0,0095;
- событие В – батарейка исправна, и она бракуется системой; P(B)=(1-0,01)·0,04=0,09·0,04=0,0036;

Искомая вероятность, равна: $P(A)+P(B)=0{,}0095+0{,}0036=\mathbf{0{,}0131}$.

59. Пусть x – вероятность того, что яйцо из первого хозяйства (событие А), тогда 1-x – вероятность того, что яйцо из второго хозяйства (событие В). По формуле полной вероятности:

$P(A)+P(B)=0{,}05x+0{,}30(1-x)=0{,}15$

$0{,}05x+0{,}30-0{,}30x=0{,}15$

$-0{,}25x=0{,}15-0{,}30$

$-0{,}25x=-0{,}15$

$x=\mathbf{0{,}6}$.

60. <u>I способ.</u> Пусть А — событие, состоящее в том, что мишень поражена стрелком с первого выстрела, $P(A)=0{,}3$;

B — событие, состоящее в том, что первый раз стрелок промахнулся, а со второго выстрела поразил мишень, $P(B)=0{,}7\cdot0{,}3=0{,}21$ ($1-0{,}3=0{,}7$ – не попал);

С — событие, состоящее в том, что первые два раза стрелок промахнулся, а с третьего выстрела поразил мишень, $P(C)=0{,}7\cdot0{,}7\cdot0{,}3=0{,}147$.

События А, В и С несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$P(A + B+ C) = P(A) + P(B) + P(C) = 0{,}3 + 0{,}21 + 0{,}147 = \mathbf{0{,}657}$.

<u>II способ.</u> Пусть А — событие, состоящее в том, что мишень не поражена; $P(A)=0{,}7\cdot0{,}7\cdot0{,}7=0{,}343$ ($1-0{,}3=0{,}7$ – не попал);

Тогда искомая вероятность представляет собой вероятность противоположного события: $\overline{A}$– мишень поражена.

$P(A)+P(\overline{A}) = 1;$

$P(\overline{A})$=1- P(A)=1 - 0,343=**0,657**.

61. Из всех пациентов, поступивших в клинику, 5% действительно больны гепатитом, а 95% - не больны. Положительный результат на гепатит может появиться при двух событиях:

событие А – пациент действительно болен (вероятность 0,05) и анализ дал положительный результат (вероятность 0,9);

событие В – пациент не болен (вероятность 0,95), но анализ дал положительный результат (вероятность 0,01).

$P(A)=0{,}05\cdot0{,}9=0{,}045$

$P(B)=0{,}95\cdot0{,}01=0{,}0095$

P(A)+P(B)=0,045+0,0095=**0,0545**.

62. Для погоды на 4, 5 и 6 июля есть 4 варианта: ХХО, ХОО, ОХО, ООО (Х — хорошая, О — отличная погода). Найдем вероятности наступления такой погоды:

1-0,08=0,02 – вероятность наступления отличной погоды;

$P(XXO) = 0{,}8\cdot0{,}8\cdot0{,}2 = 0{,}128;$

$P(XOO) = 0{,}8\cdot0{,}2\cdot0{,}8 = 0{,}128;$

$P(OXO) = 0{,}2\cdot0{,}2\cdot0{,}2 = 0{,}008;$

$P(OOO) = 0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}128.$

$P(XXO) + P(XOO) + P(OXO) + P(OOO) = 0{,}128 + 0{,}128 + 0{,}008 + 0{,}128 =$ **0,392**.

63. Решением задачи будет вероятность суммы двух несовместных событий:

событие А – майский день облачный (вероятность 0,4), но дождь не пошел (вероятность 1-0,6=0,4);

событие В – майский день ясный (вероятность 1-0,4=0,6) и дождь не пошел (1-0,2=0,8).

$P(A)=0{,}4 \cdot 0{,}4=0{,}16$

$P(B)=0{,}6 \cdot 0{,}8=0{,}48$

$P(A)+P(B)=0{,}16+0{,}48=$**0,64**.

Список литературы

Учебные пособия

*Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В.*Математика: алгебра и начала математического анализа. – Просвещение, 2020.

Колемаев В. А., Калинина В. Н. Теория вероятностей и математическая статистика. – Кнорус, 2017.

Справочники

Лысенко Ф.Ф., Кулабухов С.Ю. Математика. 7-11 классы. Карманный справочник – Легион, 2020

Роганин А.Н., Захарийченко Л.И., Захарийченко Ю.А. ЕГЭ. Математика. Универсальный справочник - Эксмо-Пресс, 2020 г.

Интернет-ресурсы

Википедия - https://ru.wikipedia.org

Мат Бюро. Математическое бюро – https://www.matburo.ru

Российская электронная школа – https://resh.edu.ru

Сдам ГИА. Образовательный портал для подготовки к экзаменам – https://ege.sdamgia.ru

Федеральный институт педагогических измерений – http://www.fipi.ru

ЕГЭ

Учебное издание

Селищева Анастасия Алексеевна

Элементы комбинаторики и теории вероятностей.
Подготовка к ЕГЭ

Учебно-методическое пособие

Обложка *А. Селищева*

Компьютерная вёрстка *А. Селищева, Н.С. Сажнева*

Корректоры *Н.С. Сажнева*

МБОУ «СОШ №3 им. Страховой З.Х.»