

Тема: Прямая и обратная геодезические задачи

Прямая геодезическая задача состоит в том, что по известным (исходным) координатам начального пункта А (точка 1), линии АВ, дирекционному углу α линии АВ и ее горизонтальному проложению S вычисляют координаты конечного пункта В (точка 2) (рис. 1).

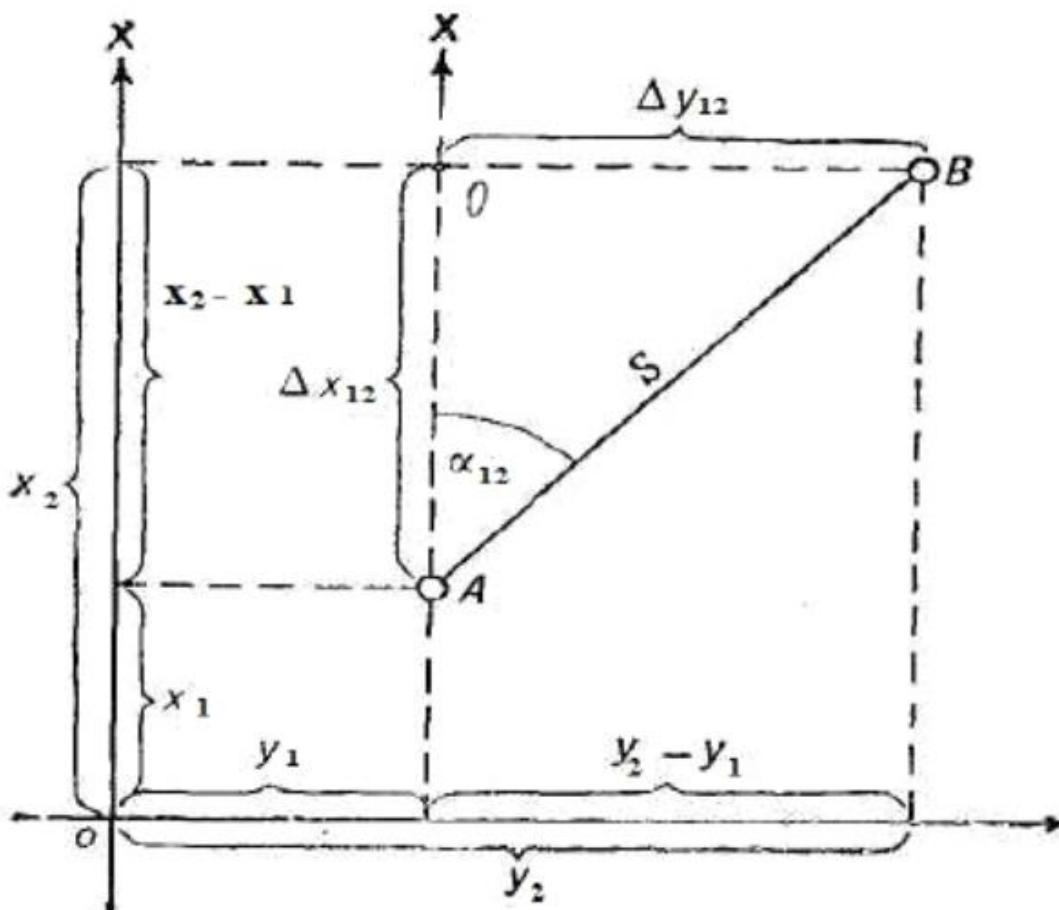


Рисунок 1 – Прямая и обратная геодезические задачи

Дано: А ($x_1; y_1$), α_{AB} , S_{AB} .

Найти: В ($x_2; y_2$)

Координаты пункта В определяются по формулам:

$$x_2 = x_1 + (x_2 - x_1) = x_1 + \Delta x;$$

$$y_2 = y_1 + (y_2 - y_1) = y_1 + \Delta y,$$

$$(x_2 - x_1) = \Delta x,$$

$$(y_2 - y_1) = \Delta y.$$

Приращениями координат Δx , Δy линии называют ортогональные проекции горизонтального проложения этой линии на оси координат.

Приращения координат могут быть найдены из треугольника АОВ по дирекционному углу линии АВ и ее горизонтальному проложению (рис. 1) по формулам:

$$\Delta x = S \cdot \cos \alpha$$

$$\Delta y = S \cdot \sin \alpha$$

$$x_2 = x_1 + S \cdot \cos \alpha$$

$$y_2 = y_1 + S \cdot \sin \alpha.$$

Знаки приращения координат (плюс или минус) зависят от значения дирекционного угла α линии (табл. 1).

Таблица 1 – Знаки приращений Δx и Δy

Дирекционный угол линии, α°	Направление линии (название румба)	Приращения Δx	Приращения Δy
$0^\circ - 90^\circ$	СВ	+	+
$10^\circ - 180^\circ$	ЮВ	-	+
$180^\circ - 270^\circ$	ЮЗ	-	-
$270^\circ - 360^\circ$	СЗ	+	-

Обратная геодезическая задача состоит в том, что по известным (исходным) координатам конечных пунктов А (точка 1) и В (точка 2) находят дирекционный угол линии АВ и ее горизонтальное проложение S.

Дано: А ($x_1; y_1$), В ($x_2; y_2$).

Найти: α_{AB} , S_{AB}

Из прямоугольного треугольника АОВ (рис. 15) находим

$$\operatorname{tg} \alpha = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1) = \Delta y / \Delta x.$$

При определении дирекционного угла особое внимание обращают на знаки приращений координат. Если требуется найти дирекционный угол линии АВ, т.е. направления с пункта А на пункт В, то, вычисляя разности,

следует из координат конечной точки (x_2, y_2) вычесть координаты начальной точки (x_1, y_1). Если требуется найти обратный дирекционный угол линии АВ, т.е. в направлении с пункта В на пункт А, то из координат начальной точки (x_1, y_1) вычитают координаты конечной точки (x_2, y_2).

Горизонтальное проложение S определяют по формулам:

$$S\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$\cos \alpha = (x_2 - x_1) / S = \Delta x / S$$

$$\sin \alpha = (y_2 - y_1) / S = \Delta y / S.$$

Пример. По карте У - 34 - 37 - В (Снов) определены прямоугольные координаты отметки уреза воды 139,4 на оз. Черном (6065856 м; 4313550 м) и пункта триангуляции с отметкой высоты 201,6 м (6064852 м; 4309647 м).

Найти дирекционный угол α направления с точки уреза воды на пункт триангуляции и горизонтальное проложение S этой линии.

Решаем обратную геодезическую задачу. Для упрощения сократим запись координат точек:

$$x_1 = 5\ 856 \text{ м}; y_1 = 13\ 550 \text{ м};$$

$$x_2 = 4\ 852 \text{ м}; y_2 = 9647 \text{ м}.$$

Вычисляем горизонтальное проложение:

$$S\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(4852 - 5856)^2 + (9647 - 13550)^2} = 4030(\text{м})$$

$$S\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(4852 - 5856)^2 + (9647 - 13550)^2} = 4030(\text{м})$$

Определим дирекционный угол направления с точки уреза воды координаты (x_1, y_1) на пункт триангуляции координаты (x_2, y_2):

$$\cos \alpha = (x_2 - x_1) / S = (4\ 852 - 5\ 856) / 4030 = -1004 / 4030 = -0,24913$$

$$\sin \alpha = (y_2 - y_1) / S = (9647 - 13550) / 4030 = -3903 / 4030 = -0,96849.$$

Так как румб меняется от 0° до 90° , то он будет равен

$$\arccos r = \arccos (0,24913) = 75,6^\circ$$

$$\arcsin r = \arcsin (0,96849) = 75,6^\circ.$$

В данном случае приращения координат и Δx и Δy имеют знак минус. Следовательно, румб линии ЮЗ (см. табл. 5), а дирекционный угол лежит в пределах

$$180^\circ < \alpha < 270^\circ.$$

Тогда значение дирекционного угла направления АВ равно:

$$\alpha = r + 180^\circ = 75,6^\circ + 180^\circ = 255,6^\circ.$$

Для контроля вычислим α и S по другим формулам:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1) = \Delta y / \Delta x = (9647 - 13550) / (4852 - 5856) = \\ &= -3903 / (-1004) = 3,89 \\ \operatorname{arctg} \alpha &= \operatorname{arctg} (3,89) = 75,6^\circ. \end{aligned}$$

$$\alpha = r + 180^\circ = 75,6^\circ + 180^\circ = 255,6^\circ.$$

$$S = (x_2 - x_1) / \cos \alpha = \Delta x / \cos \alpha = -1004 / \cos 255,6^\circ = 4030 \text{ (м);}$$

$$S = (y_2 - y_1) / \sin \alpha = \Delta y / \sin \alpha = -3903 / \sin 255,6^\circ = 4030 \text{ (м).}$$